

**EGZAMIN MATURALNY  
W ROKU SZKOLNYM 2017/2018**

**MATEMATYKA**

**POZIOM ROZSZERZONY**

**FORMUŁA OD 2015**

**(„NOWA MATURA”)**

**ZASADY OCENIANIA ROZWIĄZAŃ ZADAŃ**

**ARKUSZ MMA-R1**

**MAJ 2018**

## Zadania zamknięte

*Punkt przyznaje się za wskazanie poprawnej odpowiedzi.*

### Zadanie 1. (0–1)

| Wymagania ogólne                                   | Wymagania szczegółowe                                                                                                                        | Poprawna odpowiedź |
|----------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 1. Liczby rzeczywiste. Zdający oblicza potęgi o wykładnikach wymiernych i stosuje prawa działań na potęgach o wykładnikach wymiernych (1.4). | <b>A</b>           |

### Zadanie 2. (0–1)

|                                          |                                                                                                                                                                                                                                    |          |
|------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| I. Wykorzystanie i tworzenie informacji. | 1. Liczby rzeczywiste. Zdający wykorzystuje pojęcie wartości bezwzględnej i jej interpretację geometryczną (R1.1).<br>ALBO<br>3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania i nierówności z wartością bezwzględną (R3.9). | <b>B</b> |
|------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|

### Zadanie 3. (0–1)

|                                                    |                                                                                                                               |          |
|----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 1. Liczby rzeczywiste. Zdający stosuje w obliczeniach wzór na logarytm potęgi oraz wzór na zamianę podstawy logarytmu (R1.2). | <b>C</b> |
|----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|

### Zadanie 4. (0–1)

|                                                    |                                                                                                                                                                                 |          |
|----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 11. Rachunek różniczkowy. Zdający oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych (R11.1 ). | <b>D</b> |
|----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|

### Zadanie 5. (0–2)

|                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                 |            |
|----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 11. Rachunek różniczkowy. Zdający oblicza granice funkcji (i granice jednostronne), korzystając z twierdzeń o działaniach na granicach i z własności funkcji ciągłych (R11.1 ).<br>4. Funkcje. Zdający odczytuje z wykresu własności funkcji (dziedzinę, zbiór wartości) (4.2). | <b>166</b> |
|----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|

## Ogólne zasady oceniania zadań otwartych

Uwaga: Akceptowane są wszystkie odpowiedzi merytorycznie poprawne i spełniające warunki zadania.

### Zadanie 6. (0–3)

| Wymagania ogólne                                   | Wymagania szczegółowe                                                                                   |
|----------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| II. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji. | 11. Rachunek różniczkowy. Zdający korzysta z geometrycznej i fizycznej interpretacji pochodnej (R11.3). |

### Przykładowe rozwiązania

#### I sposób

Rozważmy funkcję kwadratową  $f$  określoną wzorem  $f(x) = \sqrt{3}x^2 - 1$ .

Współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu tej funkcji w punkcie  $P = (x_0, y_0)$

nachylonej do osi  $Ox$  pod kątem  $30^\circ$  jest równy  $\operatorname{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$  i jest równocześnie wartością pochodnej funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$ .

Wyznaczamy pochodną funkcji  $f$ :  $f'(x) = 2\sqrt{3}x$ .

Współrzędna  $x_0$  punktu styczności spełnia więc równanie

$$2\sqrt{3}x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Stąd

$$x_0 = \frac{1}{6}.$$

Wartość funkcji  $f$  dla argumentu  $x_0 = \frac{1}{6}$  jest równa

$$f(x_0) = \sqrt{3}\left(\frac{1}{6}\right)^2 - 1 = \frac{\sqrt{3}-36}{36}.$$

Zatem punkt  $P$  ma współrzędne:  $x_0 = \frac{1}{6}$ ,  $y_0 = \frac{\sqrt{3}-36}{36}$ .

#### II sposób

Styczna do paraboli nachylona do osi  $Ox$  pod kątem  $30^\circ$  ma współczynnik kierunkowy równy  $\operatorname{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , więc jej równanie jest postaci  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$ .

Punkt  $P$  to jedyny punkt wspólny paraboli i tej stycznej, więc układ równań  $y = \sqrt{3}x^2 - 1$

i  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$  ma dokładnie jedno rozwiązanie. Tak jest wtedy i tylko wtedy, gdy równanie

$\sqrt{3}x^2 - 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$ , czyli  $\sqrt{3}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1 - b = 0$  ma jedno rozwiązanie, którym jest

$$x_0 = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{6}.$$

Jest to pierwsza współrzędna punktu  $P$ . Druga współrzędna tego punktu jest więc równa

$$y_0 = \sqrt{3} \left( \frac{1}{6} \right)^2 - 1 = \frac{\sqrt{3}-36}{36}.$$

### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 p.**

Zdający

- zapisze, że współczynnik kierunkowy stycznej jest równy  $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$  lub równanie stycznej:  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + b$

albo

- wyznaczy pochodną funkcji  $f$ :  $f'(x) = 2\sqrt{3}x$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 p.**

Zdający

- zapisze równanie:  $2\sqrt{3}x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

albo

- zapisze równanie:  $\sqrt{3}x^2 - \frac{\sqrt{3}}{3}x - 1 - b = 0$  i stwierdzi, że ma ono dokładnie jedno rozwiązanie, np. zapisze  $\Delta = 0$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 3 p.**

Zdający wyznaczy współrzędne punktu  $P$ :  $x_0 = \frac{1}{6}$ ,  $y_0 = \frac{\sqrt{3}-36}{36}$ .

### Uwagi

1. Jeżeli zdający błędnie wyznaczy pochodną funkcji, ale poprawnie wyznaczy współczynnik kierunkowy stycznej, to jeśli nawet konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający przyjmie, że współczynnik kierunkowy stycznej jest równy  $\operatorname{tg} 30^\circ$ , ale przypisuje tej wielkości błędną wartość liczbową, np. zapisze  $a = \sqrt{3}$  lub  $a = \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$  itp., i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, bez żadnego innego błędu, to otrzymuje **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający błędnie zinterpretuje współczynnik kierunkowy stycznej do paraboli, np. zapisze  $a = \frac{1}{2}$  lub  $a = \sin \alpha$  itp., i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca to otrzymuje **1 punkt**.
4. Jeżeli zdający błędnie przyjmie, że kąt nachylenia stycznej do osi  $Ox$  jest równy  $150^\circ$ , i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca lub rozpatruje dwie styczne o kątach nachylenia  $30^\circ$  i  $150^\circ$  do osi  $Ox$ , to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania zadania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **2 punkty**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozwiązania na żadnym etapie.

### Zadanie 7. (0–3)

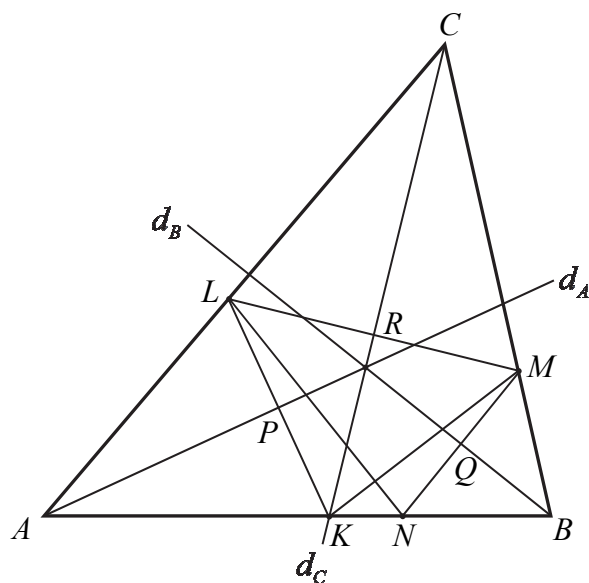
V. Rozumowanie  
i argumentacja.

7. Planimetria. Zdający stosuje twierdzenia charakteryzujące czworokąty wpisane w okrąg i czworokąty opisane na okręgu (R7.1).

### Przykładowe rozwiązania

#### I sposób – bilans kątów

Oznaczmy miary kątów trójkąta  $ABC$  odpowiednio przez  $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ , a punkt wspólny dwusiecznej  $d_A$  i odcinka  $KL$  przez  $P$ , dwusiecznej  $d_C$  i odcinka  $LM$  przez  $R$  oraz dwusiecznej  $d_B$  i odcinka  $MN$  przez  $Q$ .



Wówczas  $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$ , stąd  $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ . Wtedy

$$|\angle KAP| = \alpha, \text{ zatem } |\angle AKP| = 90^\circ - \alpha \text{ i } |\angle LKN| = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha$$

oraz

$$|\angle CMR| = 90^\circ - \gamma \text{ oraz } |\angle BMQ| = 90^\circ - \beta,$$

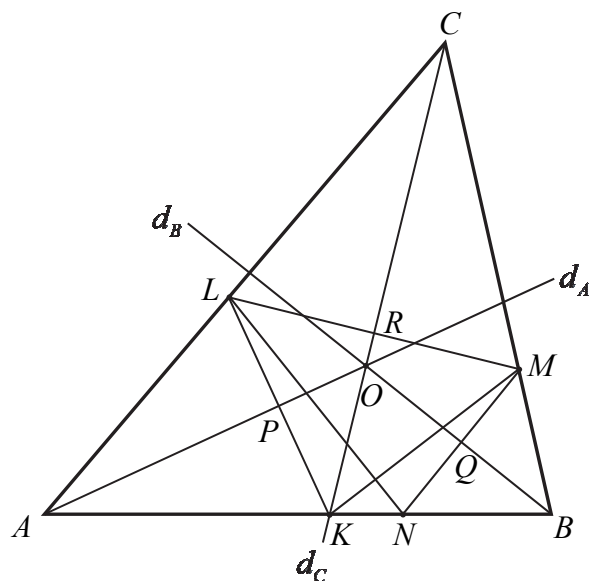
$$\text{zatem } |\angle LMN| = 180^\circ - (90^\circ - \gamma) - (90^\circ - \beta) = \beta + \gamma.$$

Suma kątów  $LKN$  i  $LMN$  jest więc równa

$$|\angle LKN| + |\angle LMN| = (90^\circ + \alpha) + (\beta + \gamma) = \alpha + \beta + \gamma + 90^\circ = 180^\circ.$$

To oznacza, że na czworokącie  $KNML$  można opisać okrąg.

## II sposób – symetralne

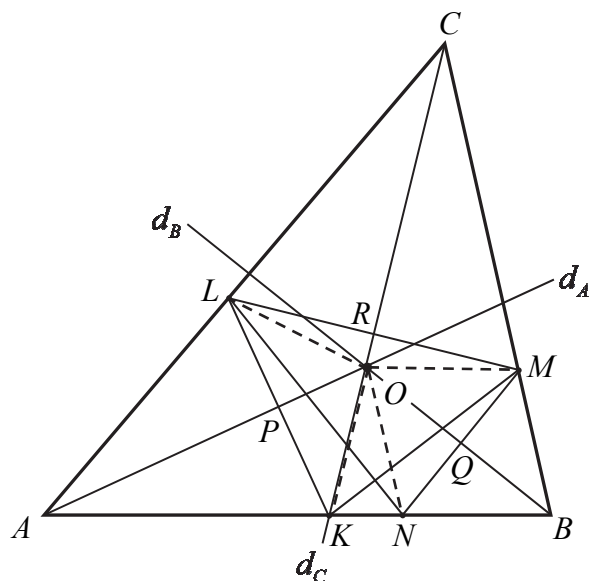


Rozważmy trójkąt  $KLM$ . Z definicji symetrii osiowej wynika, że dwusieczna  $d_A$  jest symetralną boku  $KL$ . Analogicznie dwusieczna  $d_C$  jest symetralną boku  $LM$ . Symetralne boków trójkąta przecinają się w jednym punkcie, który jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie – oznaczmy go przez  $O$ . Czyli punkt wspólny dwusiecznych  $d_A$  i  $d_C$  (symetralnych boków trójkąta  $KLM$ ) jest środkiem okręgu, którego promieniem jest w szczególności odcinek  $OL$ .

Podobnie rozważmy trójkąt  $LMN$ . Z definicji symetrii osiowej wynika, że dwusieczna  $d_C$  jest symetralną boku  $LM$ . Analogicznie dwusieczna  $d_B$  jest symetralną boku  $MN$ . Punkt wspólny tych dwusiecznych (symetralnych) jest tym samym punktem, o którym była mowa wyżej i jest oczywiście środkiem okręgu opisanego na trójkącie  $LMN$ . Zatem musi to być ten sam okrąg. Wszystkie wierzchołki czworokąta  $KNML$  leżą na tym okręgu. To kończy dowód.

### III sposób – równość promieni

Oznaczmy przez  $O$  punkt przecięcia się dwusiecznych kątów trójkąta  $ABC$ , punkt wspólny dwusiecznej  $d_A$  i odcinka  $KL$  przez  $P$ , dwusiecznej  $d_C$  i odcinka  $LM$  przez  $R$  oraz dwusiecznej  $d_B$  i odcinka  $MN$  przez  $Q$ .



Z definicji symetrii osiowej i z treści zadania wynika, że  $|KP| = |LP|$  oraz  $KL \perp AO$ . Oznacza to, że trójkąty  $OPK$  i  $OPL$  są prostokątne, mają wspólną przyprostokątną  $OP$  oraz pozostałe przyprostokątne są równej długości. Są to więc trójkąty przystające (na mocy cechy *bkb* przystawiania trójkątów). Stąd wynika, że  $|OL| = |OK|$ . Analogicznie trójkąty  $ORL$  i  $ORM$  są przystające oraz trójkąty  $OQM$  i  $OQN$  są przystające, a w konsekwencji  $|OL| = |OM|$  oraz  $|OM| = |ON|$ . Zatem punkt  $O$  jest więc równooddalony od wszystkich wierzchołków czworokąta  $KNML$ , a to oznacza, że na tym czworokącie można opisać okrąg.

### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 1 p.**

Zdający

- wyznaczy miarę jednego z kątów czworokąta  $KNML$  w zależności od miar kątów trójkąta  $ABC$ , np.:  $|\sphericalangle LKN| = 90^\circ + \alpha$

albo

- zapisze, że prosta zawierająca dwusieczną kąta trójkąta  $ABC$  jest symetralną jednego z odcinków  $KL$ ,  $LM$ ,  $MN$

albo

- zapisze jedną lub dwie równości spośród:  $|OL| = |OK|$ ,  $|OL| = |OM|$ ,  $|OM| = |ON|$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 2 p.**

Zdający

- wyznaczy miary dwóch przeciwległych kątów czworokąta  $KNML$  w zależności od miar kątów trójkąta  $ABC$ , np.:  $|\sphericalangle LKN| = 90^\circ + \alpha$  i  $|\sphericalangle LMN| = \beta + \gamma$

albo

- zapisze, że punkt przecięcia dwusiecznych kątów trójkąta  $ABC$  jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie  $KLM$  lub na trójkącie  $LMN$ , lub że jest punktem przecięcia symetralnych trzech boków czworokąta  $KNML$

albo

- zapisze i uzasadni jedną lub dwie równości spośród:  $|OL| = |OK|$ ,  $|OL| = |OM|$ ,  
 $|OM| = |ON|$

**Uwaga**

Jeżeli zdający zapisze wszystkie równości  $|OL| = |OK|$ ,  $|OL| = |OM|$ ,  $|OM| = |ON|$  i stąd wyciągnie wniosek, że punkt  $O$  jest środkiem okręgu opisanego na czworokącie  $KNML$ , ale nie uzasadni żadnej z tych równości (lub uzasadnienie nie będzie pełne), to otrzymuje **2 punkty**.

**Rozwiązanie pełne ..... 3 p.**

Zdający przeprowadzi pełne rozumowanie.

**Uwagi**

- Jeżeli zdający przeprowadza dowód z wykorzystaniem bilansu kątów i korzysta z równości kątów w trójkątach równoramiennych, to może otrzymać **3 punkty** także w przypadku, gdy bez stosownego komentarza korzysta z faktu, że trójkąty są równoramienne.
- Jeżeli zdający
  - uzależni wszystkie kąty trójkąta  $ABC$  oraz jeden z kątów czworokąta  $KNML$
  - albo
  - uzależni jeden z kątów  $LKN$ ,  $KNM$  i jeden z kątów  $KLM$ ,  $NML$  od kątów  $\alpha = \sphericalangle AKL = \sphericalangle ALK$ ,  $\beta = \sphericalangle BML = \sphericalangle BLM$  i  $\gamma = \sphericalangle CLM = \sphericalangle CML$ , to otrzymuje **1 punkt**.
- Jeżeli zdający
  - wyznaczy 2 przeciwległe kąty czworokąta  $KNML$  w zależności od  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  i wykaże, że  $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$
  - albo
  - wyznaczy wszystkie kąty czworokąta  $KNML$  i obliczy sumę dwóch przeciwległych kątów czworokąta  $KNML$ ,to otrzymuje **2 punkty**.

## Zadanie 8. (0–3)

|                                |                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| V. Rozumowanie i argumentacja. | 2. Wyrażenia algebraiczne. Zdający rozkłada wielomian na czynniki, stosując wzory skróconego mnożenia lub wyłączając wspólny czynnik przed nawias (R2.3). SP2. Działania na liczbach naturalnych. Zdający rozpoznaje liczby naturalne podzielne przez 2, 3 (SP2.3). |
|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### Przykładowe rozwiązania

#### I sposób

Zauważmy, że  $k^3m - km^3 = km(k^2 - m^2) = km(k + m)(k - m)$ .

Rozwiązanie zadania składa się z dwóch etapów:

- uzasadnienie podzielności przez 2;
- uzasadnienie podzielności przez 3.

#### Podzielność przez 2.

Gdy którakolwiek z liczb  $k, m$  jest parzysta, to iloczyn  $km(k^2 - m^2)$  jest parzysty, a gdy obie liczby  $k, m$  są nieparzyste, to ich suma  $k + m$  jest liczbą parzystą, więc iloczyn  $km(k + m)(k - m)$  jest podzielny przez 2.

#### Podzielność przez 3. (I sposób)

Dowód przeprowadzimy w czterech rozłącznych sytuacjach: A, B, C, D.

- Którakolwiek z liczb  $k, m$  jest podzielna przez 3  
Wtedy iloczyn  $km(k^2 - m^2)$  jest podzielny przez 3.
- Obie liczby  $k, m$  przy dzieleniu przez 3 dają resztę 1  
Wtedy liczba  $k - m$  jest podzielna przez 3, więc iloczyn  $km(k + m)(k - m)$  jest podzielny przez 3.
- Obie liczby  $k, m$  przy dzieleniu przez 3 dają resztę 2  
Wtedy liczba  $k - m$  jest podzielna przez 3, więc iloczyn  $km(k + m)(k - m)$  jest podzielny przez 3.
- Jedna z liczb  $k, m$  przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, a druga przy dzieleniu przez 3 daje resztę 2  
Wtedy liczba  $k + m$  jest podzielna przez 3, więc iloczyn  $km(k + m)(k - m)$  jest podzielny przez 3.

#### Podzielność przez 3. (II sposób)

Dowód przeprowadzimy w dwóch rozłącznych sytuacjach: E, F.

- Którakolwiek z liczb  $k, m$  jest podzielna przez 3.  
Wtedy iloczyn  $km(k^2 - m^2)$  jest podzielny przez 3.
- Żadna z liczb  $k, m$  nie jest podzielna przez 3.  
Wtedy kwadrat każdej z nich przy dzieleniu przez 3 daje resztę 1, więc różnica  $k^2 - m^2$  jest podzielna przez 3.

Wykazaliśmy zatem, że liczba  $k^3m - km^3$  jest podzielna przez 2 i przez 3, więc jest podzielna przez  $2 \cdot 3$ , czyli przez 6. To kończy dowód.

## II sposób

Zauważmy, że

$$k^3m - km^3 = km(k^2 - 1 + 1 - m^2) = km(k^2 - 1) - km(m^2 - 1) = km(k-1)(k+1) - km(m-1)(m+1)$$

Iloczyn  $k(k-1)(k+1)$  to iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych, więc dokładnie jedna z nich jest podzielna przez 3 i co najmniej jedna jest podzielna przez 2, więc iloczyn jest podzielny przez 2 i przez 3, a więc jest podzielny przez 6. Analogicznie iloczyn  $m(m-1)(m+1)$  jest podzielny przez 6. Różnica dwóch liczb podzielnych przez 6 jest podzielna przez 6. To kończy dowód.

### Schemat punktowania

**Zdający otrzymuje ..... 1 p.**  
jeśli

- uzasadni podzielność przez 2

albo

- uzasadni podzielność przez 3 w dwóch przypadkach spośród A, B, C, D,

albo

- uzasadni podzielność przez 3 w przypadku F.

**Zdający otrzymuje ..... 2 p.**  
jeśli

- uzasadni podzielność przez 2 i uzasadni podzielność przez 3 w dwóch przypadkach spośród A, B, C, D

albo

- uzasadni podzielność przez 2 i uzasadni podzielność przez 3 w przypadku F,

albo

- uzasadni podzielność przez 3,

albo

- zapisze liczbę  $k^3m - km^3$  w postaci  $km(k-1)(k+1) - km(m-1)(m+1)$ .

**Zdający otrzymuje ..... 3 p.**  
przeprowadzi pełne rozumowanie uzasadniające podzielność przez 6.

### Uwagi

1. Akceptujemy sytuację, w której zdający stwierdza bez uzasadnienia, że iloczyn trzech kolejnych liczb całkowitych jest podzielny przez 6 oraz różnica liczb podzielnych przez 6 jest podzielna przez 6.
2. Jeżeli zdający rozważa reszty z dzielenia liczb  $k$  i  $m$  przez 6 i udowodni podzielność przez 6 w jednym z poniższych 5 przypadków:
  - dokładnie jedna z liczb  $k, m$  jest podzielna przez 6 lub obie liczby  $k, m$  dają przy dzieleniu przez 6 tę samą resztę;
  - żadna z liczb  $k, m$  nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby  $k^3m - km^3$  można wnioskować na podstawie iloczynu liczb  $k, m$ ;
  - żadna z liczb  $k, m$  nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby  $k^3m - km^3$  można wnioskować na podstawie sumy liczb  $k, m$ ;
  - żadna z liczb  $k, m$  nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby  $k^3m - km^3$  można wnioskować na podstawie sumy i iloczynu liczb  $k, m$ ;
  - żadna z liczb  $k, m$  nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby  $k^3m - km^3$  można wnioskować na podstawie różnicy i iloczynu liczb  $k, m$ ,to otrzymuje **1 punkt**.

3. Jeżeli zdający rozważa reszty z dzielenia liczb  $k$  i  $m$  przez 6 i udowodni podzielność przez 6 w trzech z poniższych 5 przypadków:
- dokładnie jedna z liczb  $k$ ,  $m$  jest podzielna przez 6 lub obie liczby  $k$ ,  $m$  dają przy dzieleniu przez 6 tę samą resztę;
  - żadna z liczb  $k$ ,  $m$  nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby  $k^3m - km^3$  można wnioskować na podstawie iloczynu liczb  $k$ ,  $m$ ;
  - żadna z liczb  $k$ ,  $m$  nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby  $k^3m - km^3$  można wnioskować na podstawie sumy liczb  $k$ ,  $m$ ;
  - żadna z liczb  $k$ ,  $m$  nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby  $k^3m - km^3$  można wnioskować na podstawie sumy i iloczynu liczb  $k$ ,  $m$ ;
  - żadna z liczb  $k$ ,  $m$  nie jest podzielna przez 6, a o podzielności liczby  $k^3m - km^3$  można wnioskować na podstawie różnicy i iloczynu liczb  $k$ ,  $m$ ,
- to otrzymuje **2 punkty**.

### Zadanie 9. (0–4)

|                                |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| III. Modelowanie matematyczne. | 10. Elementy statystyki opisowej. Teoria prawdopodobieństwa i kombinatoryka. Zdający wykorzystuje wzory na liczbę permutacji, kombinacji, wariacji i wariacji z powtórzeniami do zliczania obiektów w bardziej złożonych sytuacjach kombinatorycznych (R10.1). Zdający oblicza prawdopodobieństwa w prostych sytuacjach, stosując klasyczną definicję prawdopodobieństwa (10.3). |
|--------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### Przykładowe rozwiązania

#### I sposób

Zdarzeniami elementarnymi są permutacje (bez powtórzeń) zbioru ośmioelementowego  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ .

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa  $|\Omega| = 8!$ .

Niech  $A$  będzie zdarzeniem, polegającym na tym, że żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednimi wyrazami utworzonego ciągu. Ustalmy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A$ .

#### *I metoda*

W zbiorze  $Z$  jest 5 liczb nieparzystych, więc możemy je ustawić w ciąg na  $5!$  sposobów. Otrzymamy wtedy sytuację:

(1) (2) (3) (4) (5) (6)

Pierwszą z pozostałych liczb (parzystych) zbioru  $Z$  możemy ustawić na jednym z sześciu miejsc (1) – (6), drugą na jednym z pozostałych pięciu, a trzecią na jednym z pozostałych czterech.

Zatem  $|A| = 5! \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ .

## II metoda

W zbiorze  $Z$  jest 5 liczb nieparzystych, więc możemy je ustawić w ciąg na  $5!$  sposobów.

Otrzymamy wtedy sytuację:

(1) n (2) n (3) n (4) n (5) n (6)

Trzy pozostałe liczby (parzyste) ze zbioru  $Z$  musimy ustawić na wybranych trzech miejscach spośród sześciu miejsc (1) – (6). Te trzy miejsca możemy wybrać na  $\binom{6}{3}$  sposobów. Na tych trzech ustalonych miejscach możemy trzy liczby parzyste ze zbioru  $Z$  ustawić na  $3!$  sposobów.

Zatem  $|A| = 5! \cdot \binom{6}{3} \cdot 3!$ .

## III metoda (ustalenie kolejności parzystych, a następnie ustalenie pozycji parzystych)

W zbiorze  $Z$  mamy 3 liczby parzyste: 2, 4, 6. Możemy ustawić je w kolejności na  $3! = 6$  sposobów. Jedną z takich możliwości jest kolejność: 2, 4, 6.

Wypiszmy wszystkie przypadki ustawienia tych trzech liczb w kolejności 2, 4, 6 w ciągu 8-wyrazowym:

(a) 2 na pierwszym miejscu

2 – 4 – 6 – – – , 2 – 4 – – 6 – – , 2 – 4 – – – 6 – , 2 – 4 – – – – 6 , 2 – – 4 – 6 – – ,  
2 – – 4 – – 6 – , 2 – – 4 – – – 6 , 2 – – – 4 – 6 – , 2 – – – 4 – – 6 , 2 – – – – 4 – 6 ,

(b) 2 na drugim miejscu

– 2 – 4 – 6 – – , – 2 – 4 – – 6 – , – 2 – 4 – – – 6 , – 2 – – 4 – 6 – , – 2 – – 4 – – 6 ,  
– 2 – – – 4 – 6 ,

(c) 2 na trzecim miejscu

– – 2 – 4 – 6 – , – – 2 – 4 – – 6 , – – 2 – – 4 – 6 ,

(d) 2 na czwartym miejscu

– – – 2 – 4 – 6 .

Łącznie mamy 20 przypadków ustawienia w ciągu 8-wyrazowym trzech liczb parzystych – 2, 4, 6 – w kolejności 2, 4, 6.

Ponieważ mamy 6 możliwości ustalenia kolejności dla trzech liczb 2, 4, 6, więc liczby parzyste ze zbioru  $Z$  możemy ustawić na  $6 \cdot 20$  sposobów.

Do ustawionych liczb parzystych na wolne miejsca ustawiamy liczby nieparzyste, a możemy to zrobić na  $5!$  sposobów.

Zatem  $|A| = 6 \cdot 20 \cdot 5!$ .

## IV metoda (ustalenie pozycji parzystych)

Wypiszmy wszystkie przypadki wyboru trzech miejsc, spośród ośmiu, dla liczb parzystych, z uwzględnieniem warunku, że żadne dwie parzyste nie sąsiadują ze sobą.

(a) pierwsza liczba parzysta na pierwszym miejscu

p – p – p – – – , p – p – – p – – , p – p – – – p – , p – p – – – – p , p – – p – p – – ,  
p – – p – – p – , p – – p – – – p , p – – – p – p – , p – – – p – – p , p – – – – p – p ,

(b) pierwsza liczba parzysta na drugim miejscu

– p – p – p – – , – p – p – – p – , – p – p – – – p , – p – – p – p – , – p – – p – – p ,  
– p – – – p – p ,

(c) pierwsza liczba parzysta na trzecim miejscu

– – p – p – p – , – – p – p – – p , – – p – – p – p ,

(d) pierwsza liczba parzysta na czwartym miejscu

– – – p – p – p .

Łącznie mamy 20 przypadków ustalenia w ciągu 8-wyrazowym pozycji liczb parzystych.

Zatem  $|A| = 20 \cdot 3! \cdot 5!$ .

Uwaga! Te same przypadki wyboru uzyskamy, wypisując wszystkie ustawienia liczb parzystych i nieparzystych przy założeniu, że rozpoczynamy najpierw od liczby parzystej (10 przypadków), a następnie od nieparzystej (kolejne 10 przypadków). Ponadto należy pamiętać, że przedstawione tu przypadki ustawień liczb parzystych (a tym samym i nieparzystych) mogą być przedstawione jako gałęzie drzewa probabilistycznego z 20 gałęziami.

*V metoda* (przerwy między parzystymi)

Trzy liczby parzyste musimy rozdzielić pięcioma nieparzystymi, przy czym nieparzyste możemy umieszczać także przed wszystkimi parzystymi lub po wszystkich parzystych. Mamy zatem 4 usytuowania dla liczb nieparzystych.

Wypiszmy najpierw przypadki uwzględniające liczbę pozycji dla liczb nieparzystych w poszczególnych usytuowaniach (cyfra oznacza liczbę miejsc zajętych przez liczby nieparzyste, litera p oznacza liczbę parzystą).

0-p-1-p-1-p-3, 0-p-1-p-2-p-2, 0-p-1-p-3-p-1, 0-p-1-p-4-p-0, 0-p-2-p-1-p-2, 0-p-2-p-2-p-1, 0-p-2-p-3-p-0, 0-p-3-p-1-p-1, 0-p-3-p-2-p-0, 0-p-4-p-1-p-0, 1-p-1-p-1-p-1, 1-p-1-p-2-p-1, 1-p-1-p-3-p-0, 1-p-2-p-1-p-1, 1-p-2-p-2-p-0, 1-p-3-p-1-p-0, 2-p-1-p-1-p-1, 2-p-1-p-2-p-0, 2-p-2-p-1-p-0, 3-p-1-p-1-p-0

Łącznie mamy 20 takich przypadków.

Zatem  $|A| = 20 \cdot 3! \cdot 5!$ .

Obliczamy prawdopodobieństwo:

$$P(A) = \frac{20 \cdot 3! \cdot 5!}{8!} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}.$$

## II sposób (zdarzenie przeciwne)

Zdarzeniami elementarnymi są permutacje (bez powtórzeń) zbioru ośmioelementowego  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ .

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa  $|\Omega| = 8!$

Niech  $A$  będzie zdarzeniem, polegającym na tym, że żadne dwie liczby parzyste nie są sąsiednimi wyrazami utworzonego ciągu.

Zdarzeniem przeciwnym  $A'$  jest otrzymanie w wyniku permutacji zbioru  $Z$  ciągu, w którym liczby parzyste są sąsiednimi wyrazami ciągu, tzn.

I: wszystkie trzy liczby parzyste będą kolejnymi wyrazami ciągu  
albo

II. dwie liczby parzyste będą kolejnymi wyrazami ciągu, a trzecia liczba parzysta nie będzie sąsiadować z żadną z nich.

W sytuacji I miejsca dla liczb parzystych wybieramy na 6 sposobów, ustawiamy na tych miejscach liczby parzyste na  $3!$  sposobów, a pozostałe liczby ustawiamy na pięciu miejscach na  $5!$  sposobów.

W sytuacji II. dla sąsiadujących liczb parzystych wybieramy miejsca na 7 sposobów:

$m_1$  i  $m_2$ ,  $m_2$  i  $m_3$ ,  $m_3$  i  $m_4$ ,  $m_4$  i  $m_5$ ,  $m_5$  i  $m_6$ ,  $m_6$  i  $m_7$ ,  $m_7$  i  $m_8$ .

Miejsce dla trzeciej parzystej liczby możemy wybrać: na 5 sposobów wtedy, gdy parzyste liczby sąsiadują na miejscach  $m_1$  i  $m_2$  albo na miejscach  $m_7$  i  $m_8$  oraz na 4 sposoby w każdej z pozostałych możliwości.

Liczby parzyste możemy rozstawić na wybranych miejscach na  $3!$  sposobów, a pozostałe liczby ustawiamy na pięciu miejscach na  $5!$  sposobów.

Wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A'$  jest:

$$6 \cdot 3! \cdot 5! + 2 \cdot 5 \cdot 3! \cdot 5! + 5 \cdot 4 \cdot 3! \cdot 5!.$$

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$ :

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{36 \cdot 3! \cdot 5!}{8!} = 1 - \frac{36 \cdot 6}{6 \cdot 7 \cdot 8} = 1 - \frac{36}{56} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}.$$

Uwaga! Zdający może wypisywać przypadki, w których wystąpią zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu  $A'$ , stosując metody analogiczne do metod III, IV, V z I sposobu rozwiązania, i uwzględnić 36 rozłącznych przypadków.

### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający

- zapisze  $|\Omega| = 8!$

albo

- wypisze przynajmniej 11 różnych przypadków spośród 20, gdy rozpatruje zdarzenie  $A$

albo

- wypisze przynajmniej 19 różnych przypadków spośród 36, gdy rozpatruje zdarzenie  $A'$ ,

albo

- zapisze, że jest  $\binom{6}{3}$  lub  $6 \cdot 5 \cdot 4$  przypadków, gdy rozpatruje zdarzenie  $A$  (lub  $6 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 4$  przypadków, gdy rozpatruje zdarzenie  $A'$ ),

albo

- zapisze iloczyn  $3! \cdot 5!$  lub w inny sposób zaznaczy uwzględnienie iloczynu  $3! \cdot 5!$ , wynikającego z permutacji liczb parzystych i liczb nieparzystych na wybranych dla nich miejscach,

albo

- narysuje drzewo z wyróżnionymi co najmniej 11 różnymi istotnymi gałęziami odpowiadającymi zdarzeniu  $A$  (albo z wyróżnionymi co najmniej 19 różnymi istotnymi gałęziami odpowiadającymi zdarzeniu  $A'$ ),

albo

- narysuje niepełne drzewo (może wystąpić brak istotnych gałęzi odpowiadających zdarzeniu  $A$  lub  $A'$ ), ale na wszystkich odcinkach co najmniej jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa, przy czym gałąź ta musi uwzględniać jeden z przypadków: wylosowano 3 parzyste liczby lub wylosowano 7 liczb

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający

- zapisze  $|\Omega| = 8!$  i wypisze przynajmniej 11 różnych przypadków spośród 20, gdy rozpatruje zdarzenie  $A$ ,

albo

- zapisze  $|\Omega| = 8!$  i wypisze przynajmniej 19 różnych przypadków spośród 36, gdy rozpatruje zdarzenie  $A'$ ,

albo

- zapisze  $|\Omega| = 8!$  i zapisze, że jest  $\binom{6}{3}$  lub  $6 \cdot 5 \cdot 4$  przypadków, gdy rozpatruje zdarzenie  $A$  (lub  $6 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 4$  przypadków, gdy rozpatruje zdarzenie  $A'$ ),

albo

- zapisze  $|A| = \binom{6}{3} \cdot 3! \cdot 5!$  lub  $|A| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5!$  lub  $|A| = 20 \cdot 3! \cdot 5!$  lub  
 $|A'| = (6 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 4) \cdot 3! \cdot 5!$  lub  $|A'| = 36 \cdot 3! \cdot 5!$ ,

albo

- narysuje drzewo z wyróżnionymi co najmniej 11 różnymi istotnymi gałęziami odpowiadającymi zdarzeniu  $A$  (albo z wyróżnionymi co najmniej 19 różnymi istotnymi gałęziami odpowiadającymi zdarzeniu  $A'$ ) i na wszystkich odcinkach co najmniej jednej gałęzi zapisze prawdopodobieństwa, przy czym gałąź ta musi uwzględniać jeden z przypadków: wylosowano 3 parzyste liczby lub wylosowano 7 liczb

i na tym zakończy lub dalej popelnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający

- zapisze  $|\Omega| = 8!$  i zapisze  $|A| = \binom{6}{3} \cdot 3! \cdot 5!$  lub  $|A| = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5!$  lub  $|A| = 20 \cdot 3! \cdot 5!$   
lub  $|A'| = (6 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 4) \cdot 3! \cdot 5!$  lub  $|A'| = 36 \cdot 3! \cdot 5!$

albo

- zapisze prawdopodobieństwo zdarzenia  $A$  (albo  $A'$ ) zgodnie z „metodą drzewkową”.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający obliczy prawdopodobieństwo:  $P(A) = \frac{5}{14}$ .

**Uwagi**

1. Możemy też rozpatrywać model probabilistyczny, w którym zdarzeniem elementarnym jest 3 elementowy podzbiór zbioru 8 elementowego (nie uwzględniamy wówczas kolejności ustawienia liczb nieparzystych ani kolejności ustawienia liczb parzystych, a jedynie pozycje zajmowane przez te liczby). Wtedy  $|\Omega| = \binom{8}{3} = 56$ ,  $|A| = \binom{6}{3} = 20$ ,

$$P(A) = \frac{5}{14}.$$

2. Jeżeli zdający błędnie założy, że podany w treści zadania ośmioelementowy zbiór  $Z$  zawiera 4 liczby parzyste i 4 liczby nieparzyste (np. założy, że zbiór  $Z$  zawiera liczbę 8 zamiast 9) i rozwiąże zadanie do końca, otrzymując  $P(A) = \frac{5 \cdot 4! \cdot 4!}{8!} = \frac{1}{14}$ , to otrzymuje

**2 punkty.** Zdający otrzymuje w tej sytuacji **1 punkt** tylko za zapisanie  $|\Omega| = 8!$ .

3. Jeżeli zdający błędnie założy, że podany w treści zadania zbiór  $Z$  jest 9-elementowy (i zawiera 4 liczby parzyste i 5 liczb nieparzystych) i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje **3 punkty**.

4. Jeżeli zdający zapisze  $|\Omega| = 8!$  oraz rozpatrując zdarzenie  $A'$  rozważy trzy sytuacje:

I. wszystkie trzy liczby parzyste są kolejnymi wyrazami ciągu;

II. dwie liczby parzyste są dwoma skrajnymi (pierwszym i drugim lub siódmym i ósmym) wyrazami ciągu, a trzecia liczba parzysta nie sąsiaduje bezpośrednio z żadną z nich;

III. dwie liczby parzyste są dwoma kolejnymi, ale nie skrajnymi wyrazami ciągu, a trzecia parzysta nie sąsiaduje bezpośrednio z żadną z nich

oraz zapisze sposób zliczania tych ciągów w każdej z tych trzech sytuacji, uwzględniający permutacje liczb parzystych i liczb nieparzystych i jednocześnie gwarantujący to, że żaden ciąg nie zostanie policzony wielokrotnie;

a ponadto nie ustali poprawnej liczby wszystkich zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu  $A'$ , to otrzymuje **2 punkty**.

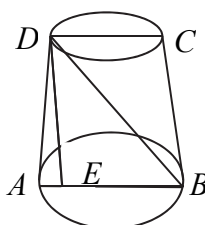
5. Jeżeli zdający rozważa zdarzenie  $A$  i wypisuje przynajmniej 12 przypadków, ale jeden z nich zapisuje dwukrotnie, to otrzymuje przynajmniej **1 punkt**. Dotyczy to także sytuacji wypisania 21 przypadków.

#### Zadanie 10. (0–4)

|                                   |                                                                                                                                                                                                                                 |
|-----------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 9. Stereometria. Zdający rozpoznaje w walcach i w stożkach kąt między odcinkami oraz kąt między odcinkami i płaszczyznami (9.3).<br>3. Równania i nierówności. Zdający rozwiązuje równania kwadratowe z jedną niewiadomą (3.4). |
|-----------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

#### Przykładowe rozwiązanie

Przekrojem osiowym stożka jest trapez równoramienny  $ABCD$ . Niech  $DE$  oznacza wysokość stożka opuszczoną z punktu  $D$ .



Po podstawieniu danych do wzoru na objętość otrzymujemy równanie kwadratowe

$$\frac{1}{3}\pi \cdot 10 \cdot (6^2 + 6R + R^2) = 840\pi.$$

Stąd

$$R^2 + 6R - 216 = 0.$$

Rozwiązując je, otrzymujemy

$$\Delta = 36 + 4 \cdot 216 = 900, \sqrt{\Delta} = 30, \\ R = \frac{-6 - 30}{2} = -18 < 0 \text{ lub } R = \frac{-6 + 30}{2} = 12.$$

Przekrojem osiowym tego stożka jest trapez równoramienny o podstawach długości 24 i 12 oraz wysokości 10. Długość odcinka  $EB$  jest równa

$$|EB| = R + r = 12 + 6 = 18.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $BDE$  otrzymujemy

$$|BD| = \sqrt{10^2 + 18^2} = \sqrt{424} = 2\sqrt{106}.$$

$$\text{Zatem } \cos|\sphericalangle DBE| = \frac{18}{2\sqrt{106}} = \frac{9}{\sqrt{106}}.$$

#### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający wyznaczy promień  $R$  większej podstawy:  $R = 12$  i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający wyznaczy promień  $R$  większej podstawy:  $R = 12$  i długość odcinka  $EB$ :  $|EB| = 18$ ,  
i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający obliczy

- długość przekątnej trapezu  $|BD| = 2\sqrt{106}$

albo

- obliczy tangens kąta  $DBE$ :  $\operatorname{tg}|\sphericalangle DBE| = \frac{5}{9}$

i na tym zakończy lub dalej popełni błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający obliczy  $\cos|\sphericalangle DBE| = \frac{9}{\sqrt{106}}$ .

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający zapisze cosinus kąta nachylenia przekątnej przekroju osiowego tego stożka ściętego do jednej z jego podstaw w zależności od  $R$ ,  $r$ ,  $H$  i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje **2 punkty**.
2. Jeżeli zdający popełni błąd merytoryczny przy zastosowaniu twierdzenia Pitagorasa, pisząc np.:  $|EB|^2 + |BD|^2 = |ED|^2$ , albo popełni błąd merytoryczny przez zastosowanie nieistniejącego wzoru "pierwiastek sumy = suma pierwiastków", to może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.
3. Jeżeli zdający błędnie przyjmie, że wysokością stożka jest odcinek  $AD$ , to może otrzymać co najwyżej **1 punkt**, o ile poprawnie obliczy  $R$ .
4. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania zadania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **3 punkty**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozwiązania na żadnym etapie.
5. Jeżeli zdający obliczy długość  $R$  oraz długość ramienia trapezu, to może otrzymać **2 punkty**. Jeżeli zdający obliczy długość  $R$  oraz długość ramienia trapezu, a ponadto obliczy długość  $BD$  i zapisze twierdzenie cosinusów, to może otrzymać **3 punkty**.
6. Jeżeli zdający błędnie przyjmuje, że średnica górnej podstawy stożka ściętego ma długość 6, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.
7. Jeżeli zdający błędnie przyjmuje, że długość rzutu prostokątnego ramienia trapezu na dłuższą podstawę to różnica średnic dolnej i górnej podstawy zamiast połowy tej różnicy i nie jest to błąd wynikający z rachunków, to otrzymuje co najwyżej **2 punkty** za całe rozwiązanie.

**Zadanie 11. (0–4)**

|                                   |                                                                                                                                                                                                      |
|-----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 6. Trygonometria. Zdający stosuje wzory na sinus i cosinus sumy i różnicy kątów, sumę i różnicę sinusów i cosinusów kątów (R6.5). Zdający rozwiązuje równania i nierówności trygonometryczne (R6.6). |
|-----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Przykładowe rozwiązanie**

Przekształcamy równanie w sposób równoważny

$$\begin{aligned}\sin 6x + \cos 3x &= 2 \sin 3x + 1, \\ 2 \sin 3x \cos 3x + \cos 3x &= 2 \sin 3x + 1, \\ \cos 3x(2 \sin 3x + 1) &= 2 \sin 3x + 1, \\ (2 \sin 3x + 1)(\cos 3x - 1) &= 0, \\ \sin 3x &= -\frac{1}{2} \text{ lub } \cos 3x = 1.\end{aligned}$$

Stąd  $3x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$  lub  $3x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$  lub  $3x = 2k\pi$ ,  $k$  – liczba całkowita.

$$\text{Zatem } x = \frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \text{ lub } x = \frac{11\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \text{ lub } x = \frac{2k\pi}{3}.$$

W przedziale  $\langle 0, \pi \rangle$  mamy następujące rozwiązania równania:  $x = \frac{7\pi}{18}$ ,  $x = \frac{11\pi}{18}$ ,  $x = 0$ ,  $x = \frac{2\pi}{3}$ .

**Schemat punktowania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ..... 1 p.**

Zdający zastosuje wzór na sinus kąta podwojonego i zapisze równanie w postaci  $2 \sin 3x \cos 3x + \cos 3x = 2 \sin 3x + 1$ , i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający zapisze dwa równania  $\sin 3x = -\frac{1}{2}$ ,  $\cos 3x = 1$ .

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający

- zapisze wszystkie rozwiązania równań  $\sin 3x = -\frac{1}{2}$  oraz  $\cos 3x = 1$  w zbiorze liczb rzeczywistych  $x = \frac{7\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$  lub  $x = \frac{11\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$  lub  $x = \frac{2k\pi}{3}$

albo

- zapisze dwa równania  $\sin 3x = -\frac{1}{2}$  oraz  $\cos 3x = 1$  i jedno z nich rozwiąże w przedziale  $\langle 0, \pi \rangle$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający zapisze wszystkie rozwiązania równania w przedziale  $\langle 0, \pi \rangle$ :  $x = \frac{7\pi}{18}$ ,  $x = \frac{11\pi}{18}$ ,

$$x = 0, \quad x = \frac{2\pi}{3}.$$

**Uwagi**

1. Jeżeli zdający poprawnie stosuje wzór na sinus kąta podwojonego, zapisze tylko jedno z równań  $\cos 3x = 1$ ,  $\sin 3x = -\frac{1}{2}$ , to otrzymuje

**1 punkt**, jeśli rozwiąże to równanie w  $\mathbf{R}$ ;

**2 punkty**, jeśli rozwiąże to równanie w  $\langle 0, \pi \rangle$ .

2. Jeżeli zdający poprawnie stosuje wzór na sinus kąta podwojonego i poprawnie zapisze równanie równoważne w postaci, w której z jednej strony występuje iloczyn, a z drugiej zero, ale w wyniku błędów zapisuje jedno równanie lub dwa równania z niewłaściwym znakiem przy stałej, to otrzymuje:

**3 punkty**, o ile konsekwentnie rozwiąże obydwa równania w przedziale  $\langle 0, \pi \rangle$ ;

**2 punkty**, o ile konsekwentnie rozwiąże dwa równania w  $\mathbf{R}$  lub konsekwentnie rozwiąże jedno równanie w  $\langle 0, \pi \rangle$ ;

**1 punkt**, o ile konsekwentnie rozwiąże jedno równanie w  $\mathbf{R}$ .

4. Jeżeli zdający wyznacza rozwiązania równań  $\cos \alpha = 1$  oraz  $\sin \alpha = -\frac{1}{2}$ , gdzie  $\alpha = 3x$ , w przedziale  $\langle 0, 3\pi \rangle$  i na tym poprzestaje lub dalej popełnia błędy, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.

5. Jeżeli zdający przy wyznaczaniu rozwiązań równań  $\cos 3x = 1$  oraz  $\sin 3x = -\frac{1}{2}$  zapisuje poprawnie serię rozwiązań pierwszego z nich (z cos) oraz jedną serię rozwiązań drugiego (z sin), a następnie konsekwentnie wyznacza przynajmniej 4 rozwiązania równania z treści zadania w przedziale  $\langle 0, \pi \rangle$ , to otrzymuje co najwyżej **3 punkty**.

**Zadanie 12. (0–6)**

|                                |                                                                  |
|--------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| III. Modelowanie matematyczne. | 3. Równania i nierówności. Zdający stosuje wzory Viète'a (R3.1). |
|--------------------------------|------------------------------------------------------------------|

**Przykładowe rozwiązanie**

Równanie ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste, gdy jego wyróżnik jest dodatni, czyli

$$\Delta = (m+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-m^2 + 1) > 0$$

$$5m^2 + 2m - 3 > 0$$

$$m_1 = -1, \quad m_2 = \frac{3}{5}.$$

$$\text{Stąd } m \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{5}, +\infty\right)$$

Warunek  $x_1^3 + x_2^3 > -7x_1x_2$  możemy zapisać w postaci równoważnej

$$(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) > -7x_1x_2,$$

$$(x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) > -7x_1x_2.$$

Ze wzorów Viète'a na sumę i iloczyn pierwiastków trójmianu kwadratowego możemy tę nierówność zapisać w postaci:

$$\left(\frac{-b}{a}\right)\left(\left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 3\frac{c}{a}\right) > -7\frac{c}{a}$$

$$-(m+1)\left(\left(-(m+1)\right)^2 - 3(-m^2+1)\right) > -7(-m^2+1)$$

$$-(m+1)^3 + 3(m+1)(-m^2+1) > -7(-m^2+1)$$

$$-(m+1)^3 + 3(m+1)(-m^2+1) + 7(-m^2+1) > 0$$

$$(m+1)\left(- (m+1)^2 + 3(-m^2+1) + 7(-m+1)\right) > 0$$

$$(m+1)(-m^2 - 2m - 1 - 3m^2 + 3 + 7 - 7m) > 0$$

$$(m+1)(-4m^2 - 9m + 9) > 0$$

$$m_1 = -3 \text{ lub } m_2 = \frac{3}{4} \text{ lub } m_3 = -1.$$

$$m \in (-\infty, -3) \cup \left(-1, \frac{3}{4}\right).$$

Wyznaczamy część wspólną zbiorów  $(-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{5}, +\infty\right)$  i  $(-\infty, -3) \cup \left(-1, \frac{3}{4}\right)$ .

Odpowiedź  $m \in (-\infty, -3) \cup \left(\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right)$ .

### Schemat punktowania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów.

**Pierwszy etap** polega na rozwiązaniu nierówności  $\Delta > 0$ :

$$m \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{5}, +\infty\right)$$

Za poprawne rozwiązanie tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

### Uwaga

Jeżeli zdający zapisze  $\Delta \geq 0$ , to za tę część otrzymuje **0 punktów**.

**Drugi etap** polega na rozwiązaniu nierówności  $x_1^3 + x_2^3 > -7x_1x_2$ .

Za tę część rozwiązania zdający otrzymuje **4 punkty**.

Podział punktów za drugi etap rozwiązania:

**1 punkt** zdający otrzymuje za zapisanie nierówności w postaci:

$$(x_1 + x_2)((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2) > -7x_1x_2$$

lub równoważnej.

**2 punkty** zdający otrzymuje za doprowadzenie do nierówności ze zmienną  $m$ , np.

$$-(m+1)\left(\left(-(m+1)\right)^2 - 3(-m^2+1)\right) > -7(-m^2+1)$$

**3 punkty** zdający otrzymuje za wyznaczenie miejsc zerowych wielomianu

$$-(m+1)\left(\left(-(m+1)\right)^2 - 3(-m^2+1)\right) + 7(-m^2+1),$$

czyli wielomianu  $-4m^3 - 13m^2 + 9$ :  $-3, -1, \frac{3}{4}$

**4 punkty** zdający otrzymuje za rozwiązanie powyższej nierówności.

$$m \in (-\infty, -3) \cup \left(-1, \frac{3}{4}\right)$$

**Trzeci etap** polega na wyznaczeniu szukanej wartości parametru  $m$  z uwzględnieniem wszystkich warunków.

$$m \in (-\infty, -3) \cup \left(\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right).$$

### Uwagi

1. W przypadku otrzymania na jednym z etapów (I lub II) zbioru pustego lub zbioru  $R$  jako zbioru rozwiązań nierówności przyznajemy **0 punktów** za III etap.
2. W przypadku otrzymania w II etapie zbioru rozwiązań, będącego podzbiorem zbioru rozwiązań z I etapu lub otrzymania w I etapie zbioru rozwiązań, będącego podzbiorem zbioru rozwiązań z II etapu, przyznajemy **0 punktów** za III etap.
3. O ile nie zachodzą przypadki z uwag 1. i 2. i zdający poprawnie wykona etap I oraz popełnia błędy w rozwiązaniu nierówności z etapu II, albo gdy popełnia błędy w etapie I i otrzyma co najmniej 1 punkt za etap II, to za III etap może otrzymać **1 punkt**.
4. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania stosuje nieistniejącą zależność: „suma sześciątów = sześciąt sumy”, prowadzącą do uproszczenia badanego problemu, lub zdający stosuje inny błędny wzór, prowadzący do uproszczenia badanego problemu, ale otrzyma nierówność wielomianową stopnia trzeciego, uzyska trzy miejsca zerowe i poprawnie rozwiązuje otrzymaną nierówność, to za II etap otrzymuje **1 punkt** (za rozwiązanie nierówności).
5. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania otrzyma poprawną nierówność wielomianową stopnia 3. i popełnia błędy rachunkowe w jej rozwiązaniu, to może otrzymać **3 punkty** za II etap, o ile wyznaczy 3 różne miejsca zerowe wielomianu z tej nierówności i konsekwentnie rozwiąże nierówność do końca, zaś w każdym innym przypadku otrzymuje **2 punkty** za ten etap.
6. Jeżeli zdający w II etapie rozwiązania rozważa nierówność wielomianową stopnia większego niż 3. lub niepoprawną nierówność stopnia 3. i wyznacza miejsca zerowe w liczbie właściwej dla stopnia wielomianu i otrzymuje przynajmniej 3 miejsca zerowe, to otrzymuje co najwyżej **3 punkty** za II etap, o ile konsekwentnie rozwiąże nierówność. Jeżeli wielomian w tej nierówności nie ma trzech różnych miejsc zerowych, to zdający może otrzymać co najwyżej **2 punkty** za ten etap.
7. Jeżeli zdający przy rozwiązywaniu otrzymanej w II etapie nierówności stopnia co najmniej 3. popełnia błąd, polegający na niepoprawnym grupowaniu wyrazów, np. z nierówności  $-4m^3 - 13m^2 + 9 > 0$  uzyska  $(4m+13)(m^2-9) > 0$ , to nie otrzymuje punktów za części II.3 i II.4.

**Zadanie 13. (0–4)**

III. Modelowanie matematyczne.

5. Ciągi. Zdający stosuje wzór na  $n$ -ty wyraz i na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu geometrycznego (5.4).**Przykładowe rozwiązanie**

Niech  $a_1$  będzie pierwszym wyrazem ciągu geometrycznego, zaś  $q$  jego ilorazem.

Z treści zadania otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} a_1 q^2 + a_1 q^5 = -84 \\ a_1 q^3 + a_1 q^6 = 168 \\ a_1 q^2 (1 + q^3) = -84 \\ a_1 q^3 (1 + q^3) = 168 \end{cases}$$

Dzieląc stronami te równania, co możemy zrobić, gdyż gdyby którakolwiek z liczb  $a_1$ ,  $q$ ,  $1 + q^3$  była równa 0, to otrzymalibyśmy sprzeczność, otrzymujemy

$$q = -2.$$

Zatem

$$\begin{aligned} a_1 (-2)^2 (1 + (-2)^3) &= -84, \\ -28 \cdot a_1 &= -84, \\ a_1 &= 3. \end{aligned}$$

Otrzymaliśmy ciąg geometryczny  $(a_n)$ , w którym:

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ q = -2 \end{cases}$$

Wykorzystując wzór na sumę  $n$  początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, doprowadzamy do równania postaci

$$\frac{3((-2)^n - 1)}{-2 - 1} = 32769.$$

Przekształcając to równanie, otrzymujemy  $(-2)^n = -32768$ . Ponieważ  $(-2)^n = (-2)^{15}$ , więc  $n = 15$ .

**Schemat punktowania**

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania** ..... 1 p.

Zdający zapisze

- układ równań z dwiema niewiadomymi, np.:  $\begin{cases} a_1 q^2 + a_1 q^5 = -84 \\ a_1 q^3 + a_1 q^6 = 168 \end{cases}$

albo

- układ równań z niewiadomymi  $q$ ,  $a_3$ ,  $a_6$ , np.:  $\begin{cases} a_3 + a_6 = -84 \\ q(a_3 + a_6) = 168 \end{cases}$

i na tym zakończy lub dalej popelnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający zapisze równanie z jedną niewiadomą  $a_1$  lub  $q$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności ..... 3 p.**

Zdający rozwiąże układ równań:  $\begin{cases} a_1 = 3 \\ q = -2 \end{cases}$ .

**Rozwiązanie pełne ..... 4 p.**

Zdający wyznaczy szukaną liczbę  $n$ :  $n = 15$ .

#### **Uwagi**

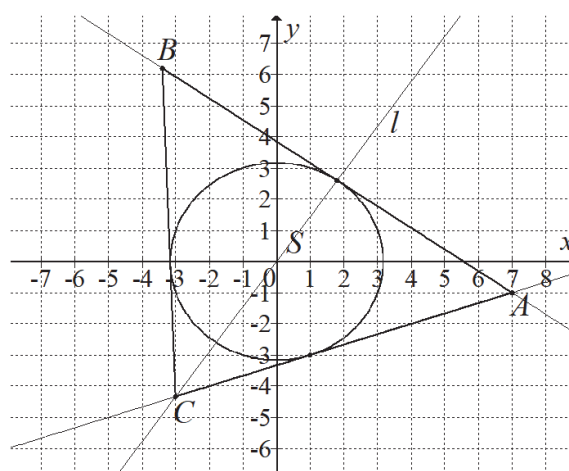
1. Jeżeli zdający przedstawi poprawną strategię poszukiwania liczby  $n$ , ale otrzyma błędne wartości  $a_1$  lub  $q$ , takie że po podstawieniu do wzoru na  $S_n$  otrzymuje równanie, którego rozwiązanie nie jest liczbą naturalną, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**, za realizację rozwiązania do etapu: istotny postęp.
2. Jeżeli zdający zapisze  $q = -2$  bez rozwiązania układu lub stosownego uzasadnienia, to może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.
3. Jeżeli zdający korzysta przy wyznaczaniu  $n$  z zapisanej przez siebie zależności " $-(-2)^n = 2^n$ " bez stosownego komentarza, to może otrzymać co najwyżej **3 punkty**.

# Zadanie 14. (0–6)

|                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|-----------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| IV. Użycie i tworzenie strategii. | 8. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej. Zdający posługuje się równaniem okręgu $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ oraz opisuje koła za pomocą nierówności, wyznacza współrzędne środka odcinka, wyznacza równanie prostej, która jest równoległa lub prostopadła do prostej danej w postaci kierunkowej i przechodzi przez dany punkt, oblicza współrzędne punktu przecięcia dwóch prostych, wyznacza punkty wspólne prostej i okręgu oraz oblicza odległość punktu od prostej (R8.5, 8.5, 8.3, 8.4, R8.6, R8.4). |
|-----------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## Przykładowe rozwiązania

I sposób – analitycznie – styczne  $AC$  i  $AB$



Proste  $AC$  i  $AB$  przechodzą przez punkt  $A = (7, -1)$ , żadna z nich nie jest prostopadła do osi  $Ox$  układu współrzędnych, więc mają równania postaci

$$y = a(x - 7) - 1,$$

$$ax - y - 7a - 1 = 0.$$

Obie te proste są styczne do okręgu, zatem ich odległości od środka okręgu są równe promieniowi okręgu. Stąd otrzymujemy równanie

$$\frac{|-7a - 1|}{\sqrt{a^2 + 1}} = \sqrt{10},$$

$$(-7a - 1)^2 = 10(a^2 + 1),$$

$$49a^2 + 14a + 1 = 10a^2 + 10$$

$$39a^2 + 14a - 9 = 0$$

$$a = \frac{-14 - 40}{78} = -\frac{9}{13} \quad \text{lub} \quad a = \frac{-14 + 40}{78} = \frac{1}{3}.$$

Szukane styczne mają więc równania:  $y = -\frac{9}{13}x + \frac{50}{13}$ ,  $y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$ . Tylko druga z tych prostych przechodzi przez trzecią ćwiartkę układu współrzędnych, więc prosta  $AC$  ma równanie  $y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$ , a prosta  $AB$  ma równanie  $y = -\frac{9}{13}x + \frac{50}{13}$ .

Trójkąt  $ABC$  jest równoramienny, a jego ramionami są boki  $AC$  i  $BC$ . Zatem wierzchołek  $C$  leży na przecięciu prostej  $AC$  i symetralnej  $l$  boku  $AB$ . Prosta  $l$  jest prostopadła do prostej  $AB$  i przechodzi przez punkt  $S = (0, 0)$ . Zatem współczynnik kierunkowy prostej  $l$  jest równy  $a_l = \frac{13}{9}$ . Stąd  $l$  ma równanie postaci

$$y = \frac{13}{9}x.$$

Współrzędne wierzchołka  $C$  obliczymy, rozwiązując układ równań

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3} \text{ i } y = \frac{13}{9}x.$$

Stąd otrzymujemy równanie

$$\frac{1}{3}x - \frac{10}{3} = \frac{13}{9}x,$$

$$\frac{10}{9}x = -\frac{30}{9}$$

$$x = -3,$$

więc  $y = \frac{13}{9} \cdot (-3) = -\frac{13}{3}$ , czyli  $C = (-3, -\frac{13}{3})$ .

Obliczamy współrzędne punktu  $D$  styczności prostej  $AB$  z danym okręgiem. Jest to punkt przecięcia prostej  $l$  z prostą  $AB$ . Wystarczy więc rozwiązać układ równań

$$y = -\frac{9}{13}x + \frac{50}{13} \text{ i } y = \frac{13}{9}x.$$

Stąd otrzymujemy równanie

$$-\frac{9}{13}x + \frac{50}{13} = \frac{13}{9}x,$$

$$\frac{250}{117}x = \frac{50}{13}$$

$$x = \frac{9}{5},$$

więc  $y = \frac{13}{9} \cdot \frac{9}{5} = \frac{13}{5}$ , czyli  $D = (\frac{9}{5}, \frac{13}{5})$ .

Punkt  $D$  jest środkiem odcinka  $AB$ , więc

$$D = \left( \frac{7+x_B}{2}, \frac{-1+y_B}{2} \right).$$

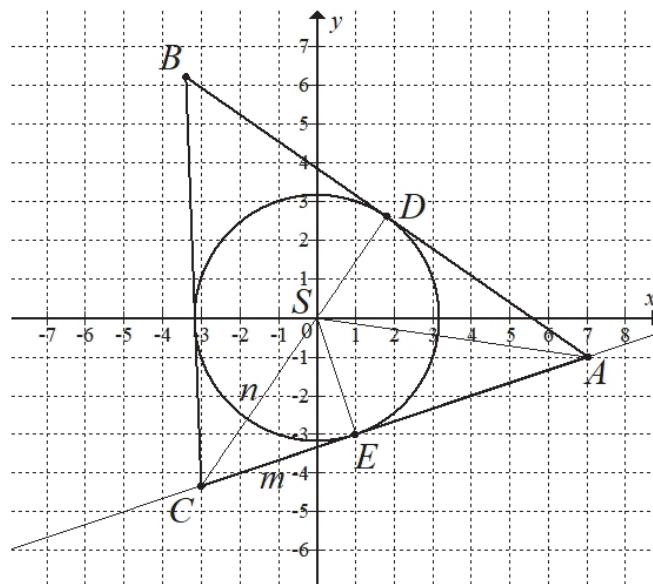
Zatem

$$\frac{7+x_B}{2} = \frac{9}{5} \text{ i } \frac{-1+y_B}{2} = \frac{13}{5},$$

$$x_B = -\frac{17}{5} \text{ i } y_B = \frac{31}{5}.$$

Zatem  $B = (-\frac{17}{5}, \frac{31}{5})$ .

II sposób – syntetycznie – długości odcinków  $CE$  i  $CS$



Promień okręgu jest równy  $r = \sqrt{10}$ . Długość odcinka  $SA$  jest równa

$$|SA| = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $ASE$  otrzymujemy

$$|SA|^2 = |SE|^2 + |EA|^2,$$

$$50 = 10 + |EA|^2,$$

$$|EA|^2 = 40,$$

$$|EA| = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

Z twierdzenia o odcinkach stycznych otrzymujemy  $|DA| = |EA| = 2\sqrt{10}$ .

Trójkąty  $CES$  i  $CDA$  są podobne, gdyż oba są prostokątne i mają wspólny kąt ostry przy wierzchołku  $C$ . Stąd wynika

$$\frac{|CE|}{|SE|} = \frac{|CD|}{|DA|} \quad \text{oraz} \quad \frac{|CS|}{|SE|} = \frac{|CA|}{|DA|},$$

$$\frac{m}{\sqrt{10}} = \frac{n + \sqrt{10}}{2\sqrt{10}} \quad \text{oraz} \quad \frac{n}{\sqrt{10}} = \frac{m + 2\sqrt{10}}{2\sqrt{10}},$$

$$2m = n + \sqrt{10} \quad \text{oraz} \quad 2n = m + \sqrt{10},$$

$$n = 2m - \sqrt{10} \quad \text{oraz} \quad 2(2m - \sqrt{10}) = m + \sqrt{10}.$$

Stąd

$$4m - 2\sqrt{10} = m + \sqrt{10},$$

$$m = \frac{4}{3}\sqrt{10}, \quad \text{więc} \quad n = 2 \cdot \frac{4}{3}\sqrt{10} - \sqrt{10} = \frac{5}{3}\sqrt{10}.$$

**Uwaga**

Długości  $m$  i  $n$  możemy też obliczyć korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkątów  $ACD$  i  $CSE$ . Otrzymujemy wtedy

$$|CA|^2 = |CD|^2 + |DA|^2 \quad \text{oraz} \quad |CS|^2 = |CE|^2 + |SE|^2,$$

$$\begin{aligned}
(m+2\sqrt{10})^2 &= (n+\sqrt{10})^2 + (2\sqrt{10})^2 \text{ oraz } n^2 = m^2 + (\sqrt{10})^2, \\
m^2 + 4m\sqrt{10} + 40 &= n^2 + 2n\sqrt{10} + 10 + 40 \text{ oraz } n^2 = m^2 + 10, \\
4m\sqrt{10} &= 2n\sqrt{10} + 20 \text{ oraz } n^2 = m^2 + 10, \\
2m - \sqrt{10} &= n \text{ oraz } (2m - \sqrt{10})^2 = m^2 + 10, \\
2m - \sqrt{10} &= n \text{ oraz } 4m^2 - 4m\sqrt{10} + 10 = m^2 + 10, \\
2m - \sqrt{10} &= n \text{ oraz } m = \frac{4}{3}\sqrt{10}, \\
n &= \frac{5}{3}\sqrt{10} \text{ oraz } m = \frac{4}{3}\sqrt{10}.
\end{aligned}$$

Zatem długość ramienia  $AC$  trójkąta  $ABC$  jest równa

$$|AC| = |CE| + |EA| = m + 2\sqrt{10} = \frac{4}{3}\sqrt{10} + 2\sqrt{10} = \frac{10}{3}\sqrt{10}.$$

Niech  $C = (x, y)$ . Ponieważ  $|AC| = \frac{10}{3}\sqrt{10}$  i  $|CS| = \frac{5}{3}\sqrt{10}$ , więc

$$\begin{aligned}
|AC|^2 &= \frac{1000}{9} \text{ i } |CS|^2 = \frac{250}{9}, \\
(x-7)^2 + (y+1)^2 &= \frac{1000}{9} \text{ i } x^2 + y^2 = \frac{250}{9}.
\end{aligned}$$

Pierwsze równanie możemy zapisać w postaci

$$x^2 + y^2 - 14x + 2y + 50 = \frac{1000}{9}.$$

Stąd i z drugiego równania otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\frac{250}{9} - 14x + 2y + 50 &= \frac{1000}{9}, \\
7x - y + \frac{50}{3} &= 0, \\
y &= 7x + \frac{150}{9}.
\end{aligned}$$

Stąd i z pierwszego równania mamy

$$\begin{aligned}
x^2 + \left(7x + \frac{50}{3}\right)^2 &= \frac{250}{9}, \\
x^2 + 49x^2 + \frac{700}{3}x + \frac{2500}{9} - \frac{250}{9} &= 0, \\
50x^2 + \frac{700}{3}x + \frac{2250}{9} &= 0, \\
x^2 + \frac{14}{3}x + 5 &= 0, \\
3x^2 + 14x + 15 &= 0, \\
3x^2 + 9x + 5x + 15 &= 0, \\
3x(x+3) + 5(x+3) &= 0, \\
(x+3)(3x+5) &= 0, \\
x = -3 \text{ lub } x = -\frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

Gdy  $x = -3$ , to  $y = 7 \cdot (-3) + \frac{50}{3} = -\frac{13}{3}$ , a gdy  $x = -\frac{5}{3}$ , to  $y = 7 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) + \frac{50}{3} = 5$ .

Ponieważ obie współrzędne punktu  $C$  są ujemne, więc  $C = \left(-3, -\frac{13}{3}\right)$ .

Niech  $B = (x, y)$ . Ponieważ  $|BC| = |AC| = \frac{10}{3}\sqrt{10}$  i  $|AB| = 2 \cdot 2\sqrt{10} = 4\sqrt{10}$ , więc

$$|BC|^2 = \frac{1000}{9} \text{ i } |AB|^2 = 160,$$

$$(-3-x)^2 + \left(-\frac{13}{3}-y\right)^2 = \frac{1000}{9} \text{ i } (x-7)^2 + (y+1)^2 = 160,$$

$$x^2 + y^2 + 6x + \frac{26}{3}y - \frac{250}{3} = 0 \text{ i } x^2 + y^2 - 14x + 2y - 110 = 0.$$

Stąd

$$x + \frac{1}{3}y + \frac{4}{3} = 0 \text{ i } x^2 + y^2 - 14x + 2y - 110 = 0,$$

$$y = -3x - 4 \text{ i } x^2 + (-3x - 4)^2 - 14x + 2(-3x - 4) - 110 = 0.$$

Drugie równanie możemy zapisać w postaci

$$10x^2 + 4x - 102 = 0,$$

$$5x^2 + 2x - 51 = 0,$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-51) = 1024, \sqrt{\Delta} = 32,$$

$$x = \frac{-2-32}{10} = -\frac{17}{5} \text{ lub } x = \frac{-2+32}{10} = 3,$$

Gdy  $x = -\frac{17}{5}$ , to  $y = -3 \cdot \left(-\frac{17}{5}\right) - 4 = \frac{31}{5}$ , a gdy  $x = 3$ , to  $y = -3 \cdot 3 - 4 = -13$ .

Ponieważ punkt  $B$  nie leży w czwartej ćwiartce układu współrzędnych, więc  $B = \left(-\frac{17}{5}, \frac{31}{5}\right)$ .

### Schemat punktowania

**Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania ..... 1 p.**

Zdający:

- a) obliczy długości odcinków stycznych poprowadzonych z punktu  $A$ :

$$|AD| = |AE| = 2\sqrt{10}$$

albo

- b) obliczy współrzędne środka  $M$  odcinka  $AS$  oraz długość odcinka  $AS$ ,

$$\text{gdzie } S = (0, 0): M = \left(\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right), |AS| = 5\sqrt{2},$$

albo

- c) obliczy sinus kąta  $SAE$ :  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ ,

albo

- d) zapisze równanie pęku prostych przechodzących przez punkt  $A$ :  $y = ax - 7a - 1$ ,

albo

- e) zapisze, że trójkąt  $ADC$  jest podobny do trójkąta  $SEC$ ,

- f) obliczy długość tylko jednego z odcinków  $AD$  lub  $AE$ :  $|AD| = |AE| = 2\sqrt{10}$  oraz zapisze tę długość w zależności od współrzędnych punktu  $D$  (lub  $E$ ) lub obliczy tangens kąta  $SAE$  lub  $SAD$ :  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$

i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

**Rozwiązanie, w którym istotny postęp ..... 2 p.**

Zdający:

A) obliczy  $|AD| = 2\sqrt{10}$  oraz zapisze układ równań 
$$\begin{cases} (x-7)^2 + (y+1)^2 = 40 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

albo

B) obliczy  $|AD| = |AE| = 2\sqrt{10}$  oraz zapisze układ równań z niewiadomymi  $m = |CE|$  i  $n = |CS|$ :

- $\frac{m}{\sqrt{10}} = \frac{n+\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}$  i  $\frac{n}{\sqrt{10}} = \frac{m+\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}$
- $(m+2\sqrt{10})^2 = (n+\sqrt{10})^2 + (2\sqrt{10})^2$  i  $n^2 = m^2 + (\sqrt{10})^2$

albo

C) obliczy  $|AD| = 2\sqrt{10}$ , obliczy tangens kąta  $SAE$ :  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$  oraz obliczy współczynnik kierunkowy prostej  $AS$  ( $a_{AS} = -\frac{1}{7}$ )

albo

D) obliczy współrzędne środka  $M = (\frac{7}{2}, -\frac{1}{2})$ , długość odcinka  $|AS| = 5\sqrt{2}$  oraz zapisze

układ równań 
$$\begin{cases} (x-\frac{7}{2})^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = \frac{25}{2} \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

albo

E) obliczy sinus kąta  $SAE$ :  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ , tangens tego kąta:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$  oraz współczynnik kierunkowy prostej  $AS$  ( $a_{AS} = -\frac{1}{7}$ )

albo

F) zapisze równanie pęku prostych przechodzących przez punkt  $A$ :  $y = ax - 7a - 1$  oraz

równanie z niewiadomą  $a$ :  $\frac{|-7a-1|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{10}$

albo

G) zapisze równanie pęku prostych przechodzących przez punkt  $A$ :  $y = ax - 7a - 1$  oraz układu równań  $x^2 + y^2 = 10$  i  $y = ax - 7a - 1$  wraz z warunkiem istnienia jednego rozwiązania tego układu

i na tym zakończy lub dalej dopełnia błędy.

**Pokonanie zasadniczych trudności zadania ..... 3 p.**

Zdający:

I obliczy współrzędne punktów styczności  $D$  i  $E$ :  $D = (\frac{9}{5}, \frac{13}{5})$ ,  $E = (1, -3)$

albo

II zapisze równania prostych  $AC$  i  $AB$ :  $y = \frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$ ,  $y = -\frac{9}{13}x + \frac{50}{13}$

albo

III obliczy długości odcinków  $CE$  i  $CS$ :  $m = |CE| = \frac{4}{3}\sqrt{10}$ ,  $n = |CS| = \frac{4}{3}\sqrt{10}$

i na tym zakończy lub dalej dopełnia błędy.

**Rozwiązanie prawie pełne ..... 4 p.**

Zdający

- obliczy współrzędne wierzchołka  $B$ :  $B = \left(-\frac{17}{5}, \frac{31}{5}\right)$

albo

- obliczy współrzędne wierzchołka  $C$ :  $C = \left(-3, -\frac{13}{3}\right)$

**Uwaga**

Jeżeli zdający

- obliczy współrzędne wierzchołka  $B$ :  $B = \left(-\frac{17}{5}, \frac{31}{5}\right)$  oraz zapisze układ równań z niewiadomymi  $x, y$  – współrzędnymi wierzchołka  $C$ , np.:  $x - 3y - 10 = 0$  i  $13x - 9y = 0$

albo

- obliczy współrzędne wierzchołka  $C$ :  $C = \left(-3, -\frac{13}{3}\right)$  oraz zapisze układ równań z niewiadomymi  $x, y$  – współrzędnymi wierzchołka  $B$ , np.:  $\frac{x+7}{2} = \frac{9}{5}$  i  $\frac{y-1}{2} = \frac{13}{5}$

albo

- obliczy współrzędne obu wierzchołków  $B$  i  $C$ , popełniając w trakcie rozwiązania błędy rachunkowe

to otrzymuje **5 punktów**.

**Rozwiązanie pełne ..... 6 p.**

Zdający obliczy współrzędne wierzchołków  $B$  i  $C$ :  $B = \left(-\frac{17}{5}, \frac{31}{5}\right)$ ,  $C = \left(-3, -\frac{13}{3}\right)$ .

**Uwagi**

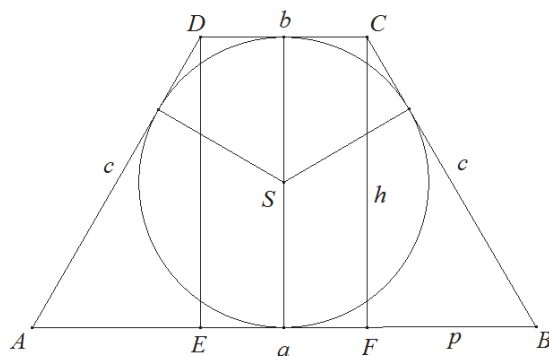
1. Jeżeli zdający pominie informację o ujemnych współrzędnych punktu  $C$  i tym samym zamieni miejscami proste  $AC$  i  $AB$ , to może otrzymać **5 punktów** za całe rozwiązanie, o ile nie popełni innych błędów.
2. Jeżeli zdający błędnie przyjmuje, że podstawą trójkąta jest inny bok niż  $AB$ , to może otrzymać co najwyżej **5 punktów**.
3. Jeżeli zdający realizuje strategię rozwiązania i popełnia jedynie błędy rachunkowe, to może otrzymać **5 punktów**, o ile popełnione błędy nie ułatwiają rozwiązania zadania na żadnym etapie.
4. Jeżeli zdający zapisze dwa równania z dwiema niewiadomymi, którymi są współrzędne punktu  $B$  lub  $C$ , to otrzymuje **2 punkty**.
5. Jeżeli zdający odczytuje z rysunku współrzędne punktu  $E$ , a następnie wyznacza równanie stycznej  $AE$  i na tym poprzestaje, to może otrzymać **1 punkt**.

**Zadanie 15. (0–7)**

|                                |                                                                                                                                                                                                                                                       |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| III. Modelowanie matematyczne. | 7. Planimetria. Zdający znajduje związki miarowe w figurach płaskich z zastosowaniem twierdzenia sinusów i twierdzenia cosinusów. (R7.5).<br>11. Rachunek różniczkowy. Zdający stosuje pochodne do rozwiązywania zagadnień optymalizacyjnych (R11.6). |
|--------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**Przykładowe rozwiązanie**

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wyznamy dziedzinę funkcji  $L$ . Z warunków zadania wynika, że  $a > h$ , więc  $a > 2 - a$ . Stąd  $a > 1$ . Jeśli  $a = 1$ , to czworokąt jest kwadratem. Ponadto  $a < 2$ . Jeśli  $a = 2$ , to  $h = 0$  i zamiast trapezu mamy do czynienia z odcinkiem o długości 2.

Rozważany trapez istnieje jedynie dla  $a \in (1, 2)$ .

Z warunków zadania otrzymujemy

$$a + h = 2, \text{ skąd } h = 2 - a.$$

Ponieważ w trapez można wpisać okrąg, więc

$$a + b = 2c.$$

Obwód  $L$  trapezu jest więc równy

$$L = a + b + 2c = 2(a + b).$$

Trapez jest równoramienny, więc odcinki  $AE$  i  $FB$  mają tę samą długość równą

$$p = \frac{a - b}{2}.$$

Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta  $BCF$  otrzymujemy

$$p^2 + h^2 = c^2,$$

$$\left(\frac{a - b}{2}\right)^2 + h^2 = \left(\frac{a + b}{2}\right)^2,$$

$$\frac{a^2}{4} - \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{4} + h^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{ab}{2} + \frac{b^2}{4},$$

$$h^2 = ab,$$

$$(2 - a)^2 = ab,$$

$$b = \frac{(2-a)^2}{a} = \frac{a^2 - 4a + 4}{a}.$$

Zatem

$$L = a + b + 2c = 2(a + b) = 2\left(a + \frac{a^2 - 4a + 4}{a}\right) = 2 \cdot \frac{2a^2 - 4a + 4}{a},$$

czyli

$$L(a) = \frac{4a^2 - 8a + 8}{a} \text{ dla } a \in (1, 2).$$

Pochodna funkcji  $L$  jest równa

$$L'(a) = \frac{(8a - 8) \cdot a - (4a^2 - 8a + 8) \cdot 1}{a^2} = \frac{4a^2 - 8}{a^2} = \frac{4(a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2})}{a^2} \text{ dla } a \in (1, 2).$$

Ponieważ dla każdego  $a \in (1, 2)$  prawdziwa jest nierówność  $\frac{4(a + \sqrt{2})}{a^2} > 0$ , więc

$$L'(a) = 0 \Leftrightarrow a - \sqrt{2} = 0 \wedge a \in (1, 2) \Leftrightarrow a = \sqrt{2},$$

$$L'(a) > 0 \Leftrightarrow a - \sqrt{2} > 0 \wedge a \in (1, 2) \Leftrightarrow a \in (\sqrt{2}, 2),$$

$$L'(a) < 0 \Leftrightarrow a - \sqrt{2} < 0 \wedge a \in (1, 2) \Leftrightarrow a \in (1, \sqrt{2}).$$

Oznacza to, że w przedziale  $(1, \sqrt{2})$  funkcja  $L$  jest malejąca, w przedziale  $(\sqrt{2}, 2)$  jest rosnąca, a w punkcie  $a = \sqrt{2}$  osiąga minimum lokalne, które jest zarazem jej najmniejszą wartością.

Tangens kąta ostrego trapezu o najmniejszym obwodzie jest równy

$$\operatorname{tg} \sphericalangle ABC = \frac{h}{p} = \frac{2-a}{\frac{a-b}{2}} = \frac{2(2-a)}{a - \frac{a^2-4a+4}{a}} = \frac{a(a-2)}{2(1-a)},$$

więc dla  $a = \sqrt{2}$  wartość tangensa jest równa

$$\operatorname{tg} \sphericalangle ABC = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-2)}{2(1-\sqrt{2})} = \frac{2-2\sqrt{2}}{2-2\sqrt{2}} = 1,$$

co oznacza, że  $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ .

### Schemat oceniania

Rozwiązanie zadania składa się z trzech etapów. Ocenianie II etapu jest niezależne od wyniku uzyskanego za I etap.

I. Pierwszy etap, który oceniamy na **3 punkty**, składa się z trzech części:

- I.1) wyznaczenie wszystkich wartości  $a$ , dla których istnieje trapez o podanych własnościach, czyli dziedziny funkcji  $L$ :  $D_L = (1, 2)$

(Za wyznaczenie dziedziny uznaje się też zapisanie dwóch nierówności:  $2 - a > 0$ ,  $a > 2 - a$ ).

- I.2) zapisanie poprawnej zależności między wielkościami  $a$  i  $b$ , np.:

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + (2-a)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \text{ lub } b = \frac{a^2 - 4a + 4}{a}$$

I.3) wykazanie, że obwód  $L$  trapezu, jako funkcja zmiennej  $a$ , wyraża się wzorem:

$$L(a) = \frac{4a^2 - 8a + 8}{a}$$

Za poprawne rozwiązanie każdej z części tego etapu zdający otrzymuje **1 punkt**.

II. Drugi etap (**3 punkty**) składa się z trzech części:

II.1) wyznaczenie pochodnej funkcji  $f(a) = \frac{4a^2 - 8a + 8}{a}$ :

$$f'(a) = \frac{(8a - 8) \cdot a - (4a^2 - 8a + 8) \cdot 1}{a^2} \quad \text{lub} \quad f'(a) = \frac{4a^2 - 8}{a^2}$$

II.2) obliczenie miejsc zerowych pochodnej funkcji  $f$ :  $a = -\sqrt{2}$  lub  $a = \sqrt{2}$

II.3) uzasadnienie (np. badanie monotoniczności funkcji), że funkcja  $L$  posiada wartość najmniejszą dla  $a = \sqrt{2}$ .

III. Trzeci etap (**1 punkt**) – obliczenie tangensa kąta ostrego trapezu o najmniejszym polu:  
 $\text{tg} \angle ABC = 1$ .

### Uwagi

1. Za poprawne uzasadnienie, że funkcja  $L$  posiada wartość najmniejszą dla wyznaczonej wartości  $a$ , przy której pochodna się zeruje można uznać sytuację, gdy zdający:

- opisuje, słownie lub graficznie (np. przy użyciu strzałek), monotoniczność funkcji  $L$ ;
- zapisuje, że dla wyznaczonej wartości  $a$  funkcja  $L$  ma minimum lokalne i jest to jednocześnie jej najmniejsza wartość.

Jeżeli zdający nie przedstawi takiego uzasadnienia, to za II etap może otrzymać co najwyżej **2 punkty**.

2. Jeżeli zdający przyjmuje, że dziedziną funkcji  $L$  jest przedział  $(0, +\infty)$  lub nie wyznaczy tej dziedziny, to **nie otrzymuje punktów** za realizację części II.3.

3. Jeżeli zdający przyjmuje, że dziedziną funkcji  $L$  jest przedział  $(0, 2)$  lub zapisze warunki:  $2 - a > 0$  i  $a > 0$ , to może otrzymać **1 punkt** za realizację części II.3., o ile uzasadni istnienie najmniejszej wartości funkcji.

4. Jeżeli zdający przyjmuje, że dziedziną funkcji  $L$  jest przedział  $(1, +\infty)$  lub zapisze warunki:  $a > h$  i  $h > 0$ , lub zapisze warunek  $a > 2 - a$ , to może otrzymać **1 punkt** za realizację części II.3., o ile uzasadni istnienie najmniejszej wartości funkcji.

5. Jeżeli zdający przyjmuje, że dziedziną funkcji  $L$  jest przedział  $\langle 1, 2 \rangle$ , to za realizację etapu I.1 otrzymuje **1 punkt**.

6. Jeżeli zdający w wyniku błędów nie wyznaczy poprawnie długości dłuższej podstawy trapezu o najmniejszym obwodzie, ale dla wyznaczonej wartości  $a$  obliczy tangens kąta ostrego trapezu, to może otrzymać **1 punkt** za III etap.

7. Jeżeli zdający bada inną funkcję zmiennej  $a$  niż postaci  $g(a) = k \cdot \frac{4a^2 - 8a + 8}{a}$ , gdzie  $k \neq 0$ , to nie otrzymuje punktów za II i III etap rozwiązania.

8. Jeżeli z zapisu rozwiązania wynika, że zdający stosuje poprawny wzór na pochodną ilorazu funkcji i dalej popełnia błędy, ale otrzymana w rozwiązaniu pochodna ma dwa różne miejsca zerowe, to zdający może otrzymać w II etapie punkty za konsekwentną realizację części II.2)

i II.3). Jeżeli z zapisu rozwiązania nie wynika, że zdający stosuje poprawny wzór na pochodną ilorazu funkcji i zdający popełnia błędy przy obliczaniu pochodnej, ale otrzymuje wzór na pochodną, w którym w liczniku jest wielomian stopnia 2, a w mianowniku  $a^2$ , to może w II etapie otrzymać jedynie punkt za konsekwentną realizację części II.3.

