

Miejsce
na naklejkę

MMA-P1_1P-082

**EGZAMIN MATURALNY
Z MATEMATYKI
POZIOM PODSTAWOWY**

**MAJ
ROK 2008**

Czas pracy 120 minut

Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 19 stron (zadania 1 – 12). Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań przedstawiaj pełne rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora. Nieprawidłowe zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w marginesie nie podlegają ocenie.
7. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą może uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.
9. Na karcie odpowiedzi wpisz swoją datę urodzenia i PESEL. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.



Za rozwiązanie
wszystkich zadań
można otrzymać
łącznie
50 punktów

Życzymy powodzenia!

**Wypełnia zdający
przed rozpoczęciem pracy**

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

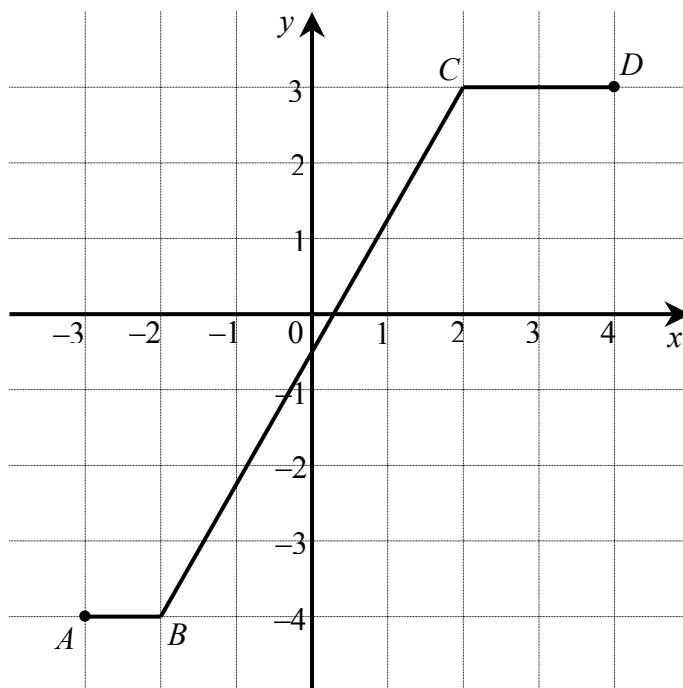
PESEL ZDAJĄCEGO

--	--	--

**KOD
ZDAJĄCEGO**

Zadanie 1. (4 pkt)

Na poniższym rysunku przedstawiono łamaną $ABCD$, która jest wykresem funkcji $y = f(x)$.



Korzystając z tego wykresu:

- zapisz w postaci przedziału zbiór wartości funkcji f ,
- podaj wartość funkcji f dla argumentu $x = 1 - \sqrt{10}$,
- wyznacz równanie prostej BC ,
- oblicz długość odcinka BC .

a) Zbiór wartości funkcji f odczytuję z wykresu. Jest nim przedział $\langle -4, 3 \rangle$.

b) Zauważam, że $-3 < 1 - \sqrt{10} < -2$. Z wykresu odczytuję, że w przedziale $\langle -3, -2 \rangle$ funkcja f jest stała i dla każdego argumentu z tego przedziału przyjmuje wartość (-4) , zatem wartością funkcji f dla argumentu $x = 1 - \sqrt{10}$ jest (-4) , co można zapisać $f(1 - \sqrt{10}) = -4$.

c) Wyznaczam równanie prostej przechodzącej przez punkty $B = (-2, -4)$

$$\text{i } C = (2, 3): \quad y - 3 = \frac{-4 - 3}{-2 - 2}(x - 2)$$

$$\text{stąd } y = \frac{7}{4}x - \frac{1}{2}.$$

Obliczam długość odcinka BC : $|BC| = \sqrt{(2 - (-2))^2 + (3 - (-4))^2} = \sqrt{65}$.

Zadanie 2. (4 pkt)

Liczba przekątnych wielokąta wypukłego, w którym jest n boków i $n \geq 3$ wyraża się wzorem

$$P(n) = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Wykorzystując ten wzór:

- oblicz liczbę przekątnych w dwudziestokącie wypukłym.
- oblicz, ile boków ma wielokąt wypukły, w którym liczba przekątnych jest pięć razy większa od liczby boków.
- sprawdź, czy jest prawdziwe następujące stwierdzenie:
Każdy wielokąt wypukły o parzystej liczbie boków ma parzystą liczbę przekątnych.
Odpowiedź uzasadnij.

a) Do podanego wzoru podstawiam $n = 20$ i otrzymuję $P(20) = \frac{20 \cdot 17}{2} = 170$.

W dwudziestokącie wypukłym jest 170 przekątnych.

b) Zapisuję równanie uwzględniające treść tego podpunktu: $\frac{n(n-3)}{2} = 5n$.

Jest ono równoważne równaniu kwadratowemu $n^2 - 13n = 0$, którego rozwiązaniem są liczby $n = 0$ lub $n = 13$.

Biorąc pod uwagę założenie, że $n \geq 3$ formułuję odpowiedź: Wielokątem wypukłym, który ma 5 razy więcej przekątnych niż boków jest trzynastokąt.

- c) Powyższe stwierdzenie nie jest prawdziwe, ponieważ sześciokąt wypukły ma 9 przekątnych, czyli $P(6) = 9$.

Zadanie 3. (4 pkt)

Rozwiąż równanie $4^{23}x - 32^9x = 16^4 \cdot (4^4)^4$.

Zapisz rozwiązanie tego równania w postaci 2^k , gdzie k jest liczbą całkowitą.

Wszystkie liczby występujące w równaniu zapisuję w postaci potęgi o podstawie 2:

$$2^{46}x - 2^{45}x = 2^{16} \cdot 2^{32}$$

Po lewej stronie równania wyłączam wspólny czynnik przed nawias, a po prawej stronie wykonuję mnożenie:

$$2^{45}x(2 - 1) = 2^{48}$$

$$2^{45}x = 2^{48}$$

dzielię obie strony równania przez 2^{45} i otrzymuję:

$$x = 2^{48} : 2^{45} = 2^3$$

Rozwiązaniem równania jest liczba 2^3 .

Zadanie 4. (3 pkt)

Koncern paliwowy podnosił dwukrotnie w jednym tygodniu cenę benzyny, pierwszy raz o 10%, a drugi raz o 5%. Po obu tych podwyżkach jeden litr benzyny, wyprodukowanej przez ten koncern, kosztuje 4,62 zł. Oblicz cenę jednego litra benzyny przed omawianymi podwyżkami.

Oznaczam literą x cenę jednego litra benzyny przed podwyżkami;

$1,1x$ – cena jednego litra benzyny po pierwszej podwyżce;

$1,05 \cdot 1,1x$ – cena jednego litra benzyny po obu podwyżkach.

Zapisuję równanie: $1,05 \cdot 1,1x = 4,62$

$$1,155x = 4,62$$

Rozwiązaniem równania jest $x = 4$;

Cena jednego litra benzyny przed podwyżkami była równa 4 zł.

Zadanie 5. (5 pkt)

Nieskończony ciąg liczbowy (a_n) jest określony wzorem $a_n = 2 - \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

- a) Oblicz, ile wyrazów ciągu (a_n) jest mniejszych od 1,975.
b) Dla pewnej liczby x trzywyrazowy ciąg (a_2, a_7, x) jest arytmetyczny. Oblicz x .

- a) Rozwiązuję nierówność $2 - \frac{1}{n} < 1,975$.

Przekształcam ją do postaci równoważnej $\frac{1}{n} > 0,025$. Nierówność tę

zapisuję w postaci $\frac{1}{n} > \frac{1}{40}$. Jest ona spełniona gdy: $n < 40$.

Ponieważ n jest liczbą naturalną, więc odpowiedź jest następująca:
39 wyrazów danego ciągu to liczby mniejsze od 1,975.

- b) Korzystam ze związku między sąsiednimi wyrazami w ciągu arytmetycznym

i zapisuję równanie: $\frac{a_2 + x}{2} = a_7$, czyli $x = 2a_7 - a_2$.

Obliczam potrzebne wyrazy: $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_7 = \frac{13}{7}$.

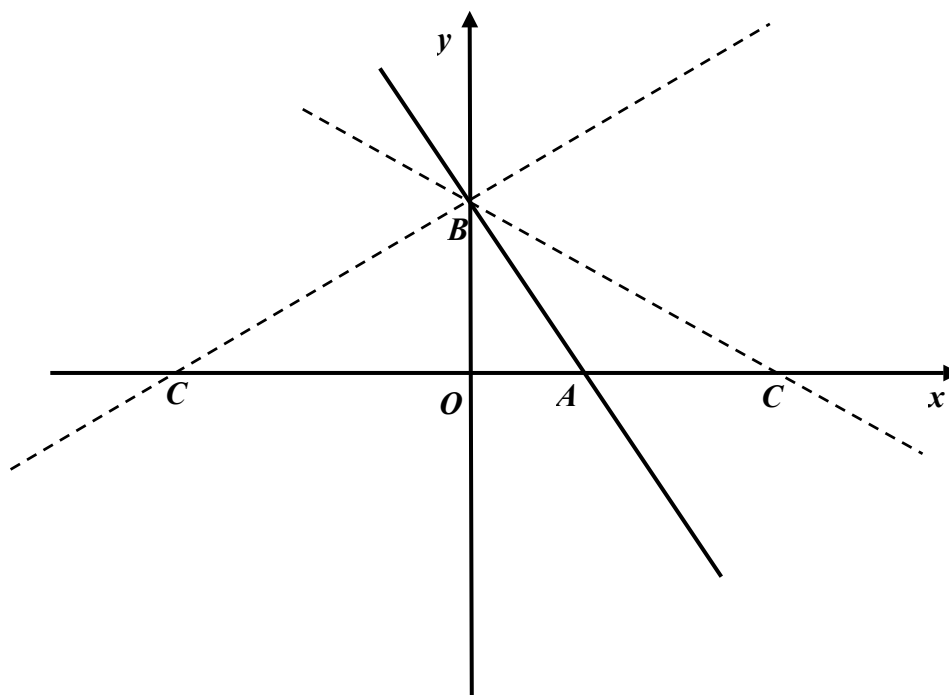
Wstawiam obliczone wartości do równania i otrzymuję $x = 2 \cdot \frac{13}{7} - \frac{3}{2} = \frac{31}{14}$.

Odpowiedź: Trzywyrazowy ciąg (a_2, a_7, x) jest arytmetyczny dla $x = \frac{31}{14}$.

Zadanie 6. (5 pkt)

Prosta o równaniu $5x + 4y - 10 = 0$ przecina oś Ox układu współrzędnych w punkcie A oraz oś Oy w punkcie B . Oblicz współrzędne wszystkich punktów C leżących na osi Ox i takich, że trójkąt ABC ma pole równe 35.

Wyznaczam współrzędne punktów A i B : $A = (2, 0)$ oraz $B = \left(0, \frac{5}{2}\right)$.



Punkt C może leżeć z lewej lub z prawej strony punktu A . Przyjmując, że w obu przypadkach wysokością trójkąta ABC jest odcinek BO , którego długość jest równa $\frac{5}{2}$ i korzystając z faktu, że pole trójkąta ABC równa się 35 zapisuję

równanie:
$$\frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BO| = 35$$

$$\frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot \frac{5}{2} = 35$$

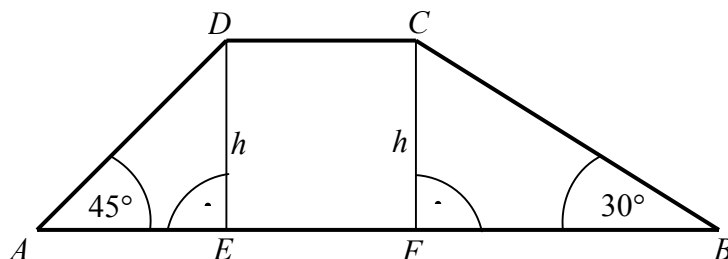
$$|AC| = 28.$$

Ponieważ punkt $A = (2, 0)$, więc $C = (30, 0)$ lub $C = (-26, 0)$.

Zadanie ma zatem dwa rozwiązania.

Zadanie 7. (4 pkt)

Dany jest trapez, w którym podstawy mają długość 4 cm i 10 cm oraz ramiona tworzą z dłuższą podstawą kąty o miarach 30° i 45° . Oblicz wysokość tego trapezu.



Trójkąt AED jest trójkątem prostokątnym i równoramiennym ($|\sphericalangle DAE| = |\sphericalangle EDA| = 45^\circ$), więc $|AE| = |ED| = h$.

Korzystam z własności trójkąta prostokątnego BFC i zapisuję zależność między przyprostokątnymi $\frac{|CF|}{|FB|} = \operatorname{tg} 30^\circ$, stąd $|FB| = |CF| \cdot \sqrt{3}$, $|FB| = h\sqrt{3}$.

$|EF| = |DC| = 4$, więc otrzymuję równanie:

$|AE| + 4 + |FB| = 10$, z którego po podstawieniu wyznaczonych wielkości otrzymuję:

$$h + 4 + h\sqrt{3} = 10.$$

Obliczam wysokość trapezu:

$$h + h\sqrt{3} = 6$$

$$h(1 + \sqrt{3}) = 6$$

$$h = \frac{6}{\sqrt{3} + 1} = 3(\sqrt{3} - 1).$$

Odpowiedź: Wysokość trapezu jest równa $3(\sqrt{3} - 1)$ cm.

Zadanie 8. (4 pkt)

Dany jest wielomian $W(x) = x^3 - 5x^2 - 9x + 45$.

- a) Sprawdź, czy punkt $A = (1, 30)$ należy do wykresu tego wielomianu.
- b) Zapisz wielomian W w postaci iloczynu trzech wielomianów stopnia pierwszego.

a) Obliczam $W(1)$:

$$W(1) = 1^3 - 5 \cdot 1^2 - 9 \cdot 1 + 45 = 32$$

$$W(1) \neq 30$$

Otrzymany wynik oznacza, że punkt A nie należy do wykresu wielomianu W .

b) Rozkładam wielomian na czynniki:

$$\begin{aligned} W(x) &= x^3 - 5x^2 - 9x + 45 = \\ &= x^3 - 9x - 5x^2 + 45 = \\ &= x(x^2 - 9) - 5(x^2 - 9) = \\ &= (x^2 - 9)(x - 5) = \\ &= (x + 3)(x - 3)(x - 5). \end{aligned}$$

Odpowiedź: $W(x) = (x + 3)(x - 3)(x - 5)$.

Zadanie 9. (5 pkt)

Oblicz najmniejszą i największą wartość funkcji kwadratowej $f(x) = (2x+1)(x-2)$ w przedziale $\langle -2, 2 \rangle$.

Zapisuję wzór funkcji w postaci ogólnej $f(x) = 2x^2 - 3x - 2$.

Wyznaczam odcięta wierzchołka paraboli: $x_w = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{4}$.

Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli należy do przedziału $\langle -2, 2 \rangle$, więc najmniejszą wartością funkcji f w tym przedziale jest druga współrzędna

wierzchołka: $y_w = \frac{-\Delta}{4a} = -\frac{25}{8}$.

Obliczam wartości funkcji na końcach przedziału: $f(-2) = 12$, $f(2) = 0$.

Największą wartością funkcji f w podanym przedziale jest $f(-2) = 12$.

Odpowiedź: Najmniejszą wartością funkcji w podanym przedziale jest

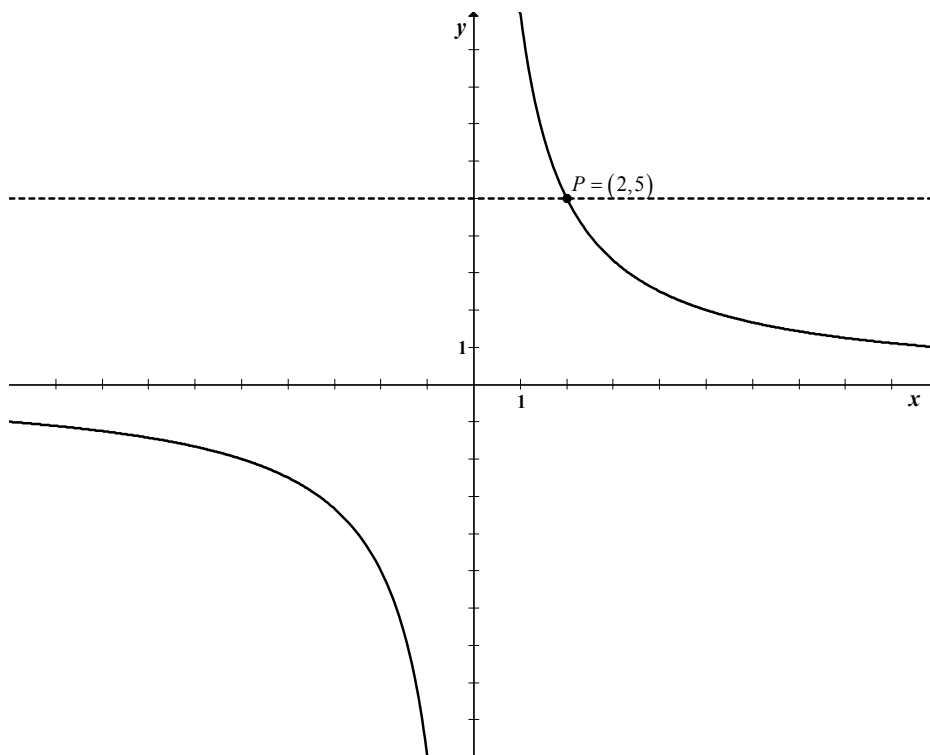
$y_w = -\frac{25}{8}$, a największą $f(-2) = 12$.

Zadanie 10. (3 pkt)

Rysunek przedstawia fragment wykresu funkcji h , określonej wzorem $h(x) = \frac{a}{x}$ dla $x \neq 0$.

Wiadomo, że do wykresu funkcji h należy punkt $P = (2, 5)$.

- Oblicz wartość współczynnika a .
- Ustal, czy liczba $h(\pi) - h(-\pi)$ jest dodatnia czy ujemna.
- Rozwiąż nierówność $h(x) > 5$.



a) Korzystam z faktu, że punkt $P = (2, 5)$ należy do wykresu funkcji h i wyznaczam współczynnik a : $5 = \frac{a}{2}$ stąd $a = 10$.

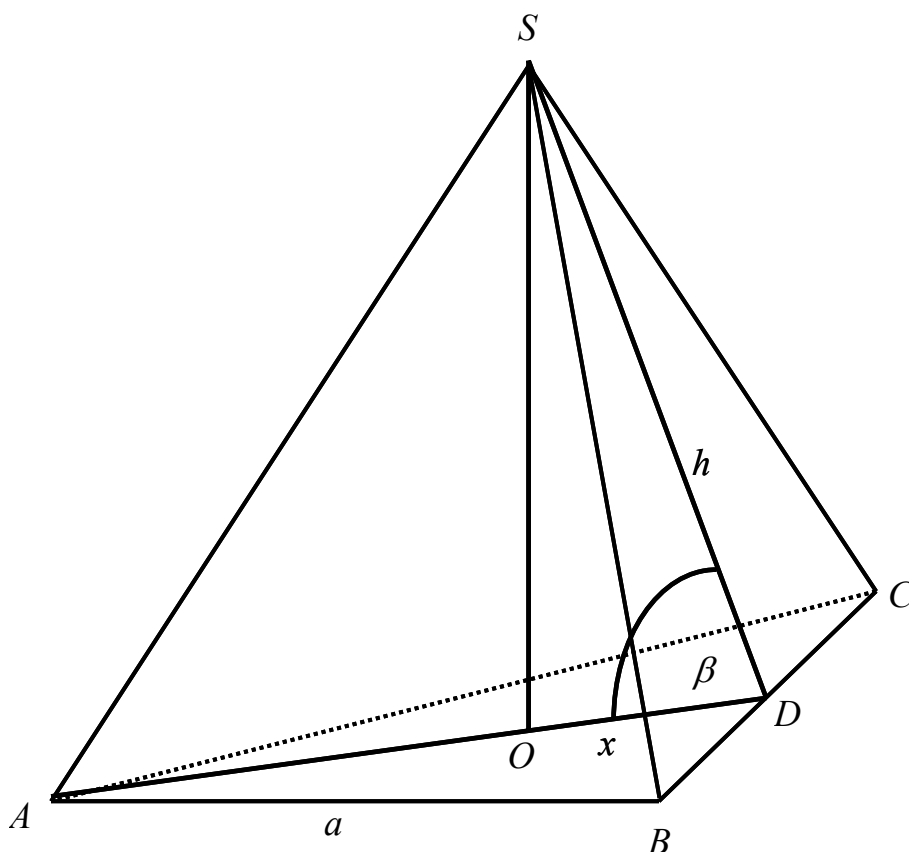
Funkcja h jest dana wzorem: $h(x) = \frac{10}{x}$.

b) Z wykresu odczytuję, że $h(-\pi) < 0$, natomiast $h(\pi) > 0$. Stąd wynika, że $h(\pi) - h(-\pi)$ jest liczbą dodatnią.

Z informacji podanej w zadaniu wiem, że wykres funkcji h przechodzi przez punkt $P = (2, 5)$. Odczytuję rozwiązanie nierówności $h(x) > 5$ z wykresu: jest to przedział $(0, 2)$.

Zadanie 11. (5 pkt)

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego równa się $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$, gdzie a oznacza długość krawędzi podstawy tego ostrosłupa. Zaznacz na poniższym rysunku kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny jego podstawy. Miarę tego kąta oznacz symbolem β . Oblicz $\cos \beta$ i korzystając z tablic funkcji trygonometrycznych odczytaj przybliżoną wartość β z dokładnością do 1° .



Na rysunku zaznaczam kąt nachylenia ściany bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy – β (punkt D jest środkiem odcinka BC).

Wprowadzam oznaczenie: h – wysokość ściany bocznej.

Zapisuję równanie opisujące pole powierzchni bocznej ostrosłupa:

$$3 \cdot \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{a^2 \sqrt{15}}{4}, \text{ z którego wyznaczam wysokość ściany bocznej ostrosłupa}$$

$$h = \frac{a\sqrt{15}}{6}.$$

Z trójkąta prostokątnego SOD , w którym $x = |OD| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ – długość promienia

okręgu wpisanego w podstawę ostrosłupa otrzymuję: $\cos \beta = \frac{x}{h}$.

$$\cos \beta = \frac{x}{h} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{\frac{a\sqrt{15}}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0,4472.$$

Z tablicy wartości funkcji trygonometrycznych odczytuję miarę kąta: $\beta = 63^\circ$.

Zadanie 12. (4 pkt)

Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo każdego z następujących zdarzeń:

- a) A – w każdym rzucie wypadnie nieparzysta liczba oczek.
- b) B – suma oczek otrzymanych w obu rzutach jest liczbą większą od 9.
- c) C – suma oczek otrzymanych w obu rzutach jest liczbą nieparzystą i większą od 9.

Ω dla tego doświadczenia jest zbiorem wszystkich uporządkowanych par, których wyrazy mogą się powtarzać i każdy z tych wyrazów może być jedną z liczb: 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Można ten zbiór opisać w tabelce:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

$$|\Omega| = 6^2 = 36.$$

Zdarzeniu A sprzyja 9 zdarzeń elementarnych:

$$\{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}.$$

$$\text{Obliczam prawdopodobieństwo zdarzenia } A: P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

Zdarzeniu B sprzyja 6 zdarzeń elementarnych. Łatwo je wypisać:

$$\{(6,6), (6,5), (6,4), (5,6), (5,5), (4,6)\}.$$

$$\text{Obliczam prawdopodobieństwo zdarzenia } B: P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Zdarzeniu C sprzyjają dwa zdarzenia elementarne: $\{(6,5), (5,6)\}$

$$\text{Obliczam prawdopodobieństwo zdarzenia } C: P(C) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}.$$

BRUDNOPIS

